Semaine n°27 du 12 au 17 mai 2025

Espaces vectoriels et dimension finie

- Espace vectoriel de dimension finie (engendré par une famille finie de vecteurs). Théorème de la base extraite. Existence d'une base pour un ev non nul de dimension finie.
- Dans un ev engendré par n vecteurs : toute famille de (au moins) $n+1$ vecteurs est liée. Toutes les bases d'un ev de dimension finie ont le même cardinal : définition de la dimension d'un ev. Exemples classiques : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Théorème de la base incomplète.
- Caractérisation des bases : si $\text{card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$,
$$(\mathcal{F} \text{ libre}) \Leftrightarrow (\mathcal{F} \text{ base de } E) \Leftrightarrow (\mathcal{F} \text{ génératrice de } E).$$
- Définition du rang d'une famille finie de vecteurs : $(\text{rg}(\mathcal{F}) = \text{card}(\mathcal{F})) \Leftrightarrow (\mathcal{F} \text{ est libre})$.
- Dimension d'un sev d'un ev de dimension finie : cas d'égalité. Existence d'un supplémentaire dans un ev de dimension finie, caractérisation par l'intersection et les dimensions. Dimension de la somme de deux sev (formule de Grassmann). Caractérisation de deux sev supplémentaires en dimension finie.
- Caractérisation des isomorphismes par l'image d'une base. Deux ev sont isomorphes ssi ils ont la même dimension. Entre deux ev de même dimension, une application linéaire est bijective ssi elle est injective OU surjective.
- Applications linéaires de rang fini. Invariance du rang par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme. Théorème du rang.
- Si $\dim(E) = n$, alors un sev H de E est un hyperplan si et seulement si $\dim(H) = n - 1$. Equations d'un hyperplan dans une base donnée en dimension finie.

Matrices et applications linéaires

- Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases, utilisation pour le calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur. Matrice d'une combinaison linéaire, d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.
- Matrice de passage d'une base à une autre, application aux calculs de coordonnées sur des bases différentes. Lien avec les matrices d'une application linéaire ou d'un endomorphisme.
Définition et propriétés de matrices semblables.
- Application linéaire canoniquement associée à une matrice.
- Image, noyau, rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Conservation du rang par multiplication par une matrice inversible. Une matrice et sa transposée ont le même rang : le rang des lignes égale le rang des colonnes. Liens avec les systèmes linéaires (rappels).
- Rappels : déterminant d'une famille de vecteurs sur une base : $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}))$. Caractérisation des bases.
- **Déterminant d'un endomorphisme** : c'est le déterminant de sa matrice relativement à n'importe quelle base.

Exercices

Exercice 1 Soit H_1 et H_2, deux hyperplans (i.e sev admettant chacun une droite comme supplémentaire) **distincts** d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie n.
Montrer que $H_1 \cap H_2$ est de dimension $n-2$.

Exercice 2 Montrer que F et G sont des sev supplémentaires de $E = \mathbb{R}_4[X]$ avec :
$$F = \{P \in E = \mathbb{R}_4[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\} \text{ et } G = \{P \in E = \mathbb{R}_4[X] \mid P(2) = P(3) = P(4) = 0\}.$$

Exercice 3 Soit f et g, deux endomorphismes d'un ev E de dimension n. On suppose $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$. Montrer que ces deux sommes sont directes.

Exercice 4 Soit E, un espace vectoriel de **dimension finie** et f un endomorphisme de E.
Montrer que les 4 propositions suivantes sont équivalentes :
(1) $\boxed{E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)}$, (2) $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)}$, (3) $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)}$ et (4) $\boxed{E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)}$.

Exercice 5 Soit f, un endomorphisme d'un ev E de dimension 3 tel que $f^3 = \tilde{0}$ mais $f^2 \neq \tilde{0}$ (on dit f est un *endomorphisme nilpotent d'indice* 3). Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{a} \in E$ tel que $f^2(\vec{a}) \neq \vec{0}$, puis $\mathcal{B} = (\vec{a}, f(\vec{a}), f^2(\vec{a}))$ est une base de E.
Rang de f ? Matrice de f dans la base $\mathcal{B}$?

Exercice 6 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et f, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Autrement dit : montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont **semblables**. Quelle relation existe-t-il entre les matrices A et T ?
Calculer T^n et indiquer une méthode de calcul de A^n.

Exercice 7 Dans $E = \mathbb{R}^3$, soit le plan F d'équation «$x = z$» et la droite $G = \mathrm{vect}(\vec{a})$ où $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Donner une base $(\vec{b}, \vec{c})$ du plan F, vérifier que $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une base de E.
Soit p, le projecteur sur F parallèlement à G : préciser la matrice D de p relativement à la base $\mathcal{B}$, puis M matrice de p relativement à la base canonique $\mathcal{C}$ de $E = \mathbb{R}^3$.
Préciser la matrice M' de s relativement à la base canonique $\mathcal{C}$ où s est la symétrie par rapport à F dans la direction G.

Exercice 8 A quelle condition sur $a \in \mathbb{R}$ la famille $\mathcal{F} = (1 + X - X^2, 3 - X + 5X^2, -1 + aX + 3X^2)$ est-elle une base de $E = \mathbb{R}_2[X]$?

Exercice 9 Soit (a, b), deux réels. Si $P \in E = \mathbb{R}_2[X]$, on pose $f(P) = (aX + b)P + (X^2 + X + 1)P'$.

1. A quelle condition, portant sur a et b, f définit-elle un endomorphisme de E ?
2. Cela étant réalisé, à quelle condition f est-elle un automorphisme de E ?
3. Dans le cas où f n'est pas bijective, préciser une base du noyau de f et une base de son image.

Exercice 10

1. Montrer que si deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les matrices $(A - \lambda \mathrm{I}_n)$ et $(B - \lambda \mathrm{I}_n)$ sont également semblables.
2. Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.