

Semaine n°23 du 31 mars au 05 avril 2025

Somme de sous-espaces

- Somme de deux sous-espaces vectoriels F et G . Notation $F + G$. Propriété : c'est un sous-espace.
- $\text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p) + \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$.
- Somme directe de deux sous-espaces vectoriels F et G (lorsque la décomposition de tout vecteur de $F + G$ est unique). Notation : $F \oplus G$. Caractérisation par l'intersection de ces deux sous-espaces réduite au vecteur nul.
- Sous-espaces supplémentaires d'un espace vectoriel. Exemples : $\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- Si F et G sont deux sous-espaces supplémentaires d'un espace E , définition du projecteur (projection vectorielle) p sur F (*base*) parallèlement à (ou selon) G (*direction*). Projecteur associé $q = \text{Id}_E - p$.
- Un **hyperplan** de E est un sev de E qui admet une droite vectorielle comme supplémentaire dans E . Dans ce cas, pour tout vecteur $\vec{b} \notin H$, on a $H \oplus \text{Vect}(\vec{b}) = E$.

Familles finies de vecteurs

- Famille liée. Famille libre : caractérisation par l'unicité d'une combinaison linéaire nulle. Unicité de la décomposition sur une famille libre.
- Toute famille de polynômes (non nuls) de degrés deux à deux distincts (échelonnés) est libre dans l'espace $\mathbb{K}[X]$.
- Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.
- Une base d'un espace vectoriel E est une famille libre et génératrice de cet espace. Equivalence avec l'existence et l'unicité de la décomposition de tout vecteur de E sur cette famille de vecteurs de E . Bases canoniques de \mathbb{K}^n , $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Si \mathcal{B} est une base de l'espace E , définition de la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur \vec{x} de E : notation (personnelle) $[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$. Si \mathcal{F} est une famille de vecteurs de E , définition de la matrice des coordonnées des vecteurs de \mathcal{F} sur la base \mathcal{B} ($M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$) et utilisation de cette matrice pour étudier la liberté de la famille \mathcal{F} (\mathcal{F} est libre ssi le rang de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est égal au cardinal de \mathcal{F} i.e au nombre de ses colonnes). Cas où \mathcal{F} et \mathcal{B} ont le même nombre n de vecteurs : la matrice M est carrée (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), et (\mathcal{F} est une base de E) ssi (M est une matrice inversible i.e de rang n i.e $\det(M) \neq 0$).
- Conséquence : si une base de E comporte n vecteurs, toute famille de E comportant au moins $n + 1$ vecteurs est nécessairement liée. Opérations élémentaires sur les colonnes de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ pour déterminer la liberté d'une famille \mathcal{F} ou exhiber une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs de \mathcal{F} .
- Si $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n)$ est une famille libre, alors $\text{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k)$ et $\text{Vect}(\vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n)$ sont en somme directe. Si \mathcal{B}_1 est une base de E_1 et \mathcal{B}_2 est une base de E_2 , avec E_1 et E_2 deux sous-espaces en somme directe d'un espace E , alors la réunion de ces deux bases $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de la somme directe $E_1 \oplus E_2$ (appelée base adaptée à la somme directe $E_1 \oplus E_2$). Conséquence : si \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 sont des bases des sev E_1 et E_2 de E , alors on a l'équivalence : (E_1 et E_2 supplémentaires dans E i.e $E_1 \oplus E_2 = E$) \Leftrightarrow ($\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E).

Applications linéaires (1^{ère} partie)

- Applications linéaires, endomorphismes. Combinaisons linéaires et compositions d'applications linéaires : $\mathcal{L}(E, F)$ est un \mathbb{K} -ev, calculs dans $\mathcal{L}(E)$.
- Image d'un sous-espace par une application linéaire, image et noyau d'une application linéaire : ce sont des sev. Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire à l'aide de son noyau.

Exercices

Exercice 1 Dans $E = \mathbb{R}^3$, soit $H = \{(x, y, z) \in E \mid x - y + 2z = 0\}$ et $\Delta = \text{vect}(\vec{a})$ avec $\vec{a} = (1, 1, 1)$. Montrer : $H \oplus \Delta = E$ et donner une expression de $p(\vec{v})$, projeté du vecteur \vec{v} sur H dans la direction Δ .

Exercice 2 Soit \mathcal{S}_n (respectivement \mathcal{A}_n), ensemble des matrices symétriques (respectivement antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ce sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3 Soit \mathcal{P} (respectivement \mathcal{I}) l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont paires (respectivement impaires). Ce sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 4 Soit l'espace $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On définit $H = \{f \in E \mid \int_0^{\pi} f = \int_0^{\pi} f(t)dt = 0\}$ et $D = \text{Vect}(\sin)$. Montrer que H et D sont des sous-espaces supplémentaires de E . Justifier $H \oplus \text{Vect}(\exp) = E$. On note p , le projecteur sur H selon la direction D : préciser $p(\cos)$, $p(\sin)$, $p(\tilde{1})$.

Exercice 5 Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, montrer que la famille (\cos, \sin, \exp) est libre.

Exercice 6 $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f_k(x) = \sin^k(x)$: montrer que la famille $\mathcal{F} = (f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{[0, \frac{\pi}{2}]} = \mathcal{F}([0, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$.

Exercice 7 Pour $m \in \mathbb{R}$, on définit les polynômes

$P_1 = m + X + X^2 + X^3$ et $P_2 = 1 + mX + X^2 + X^3$ et $P_3 = 1 + X + mX^2 + X^3$ et $P_4 = 1 + X + X^2 + mX^3$. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la famille $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ est-elle une base de $E = \mathbb{R}_3[X]$? Lorsque \mathcal{F} est liée, préciser une base de $\text{vect}(\mathcal{F}) = \text{vect}(P_1, P_2, P_3, P_4)$.

Exercice 8 Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on a la caractérisation : (f est injective) \Leftrightarrow ($\text{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$).

Exercice 9 Noyau et image de $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z, 7x + 8y + 9z)$.