

## Semaine n°22 du 24 au 29 mars 2025

## Les polynômes

- Expression de la décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{R}$  des fonctions rationnelles à **pôles simples**.

## Les espaces vectoriels

- Structure de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). Exemples :  $\mathbb{K}^n$ ,  $\mathbb{K}[X]$ ,  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  sont des  $\mathbb{K}$ -ev.
- Si  $\Omega$  est un ensemble quelconque (non vide),  $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^\Omega$ , ensemble des applications de  $\Omega$  vers  $\mathbb{K}$ , est un  $\mathbb{K}$ -ev. Exemple :  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ , l'ensemble des suites à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , est un  $\mathbb{K}$ -ev.
- Notion de sous-espace vectoriel d'un  $\mathbb{K}$ -ev : c'est aussi un  $\mathbb{K}$ -ev. Caractérisation (partie de  $E$  qui contient le vecteur nul de  $E$  et est stable par combinaison linéaire). Exemples.
- Sous espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs (ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de cette famille). Notation  $\text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ .
- L'intersection d'une famille de sous-espaces de  $E$  est un sous-espace de  $E$ .

## Somme de sous-espaces

- Somme de deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  de  $E$ . Notation  $F + G$ . C'est un sous-espace de  $E$ .
- $\text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p) + \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ .
- Somme directe de deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  (lorsque la décomposition de tout vecteur de  $F + G$  est unique). Notation :  $F \oplus G$ . Caractérisation par l'intersection de ces deux sous-espaces réduite au vecteur nul.
- Sous-espaces supplémentaires d'un espace vectoriel. Exemples :  $\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .
- Si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces supplémentaires d'un espace  $E$ , définition du projecteur (projection vectorielle)  $p$  sur  $F$  (*base*) parallèlement à (ou selon)  $G$  (*direction*). Projecteur associé  $q = \text{Id}_E - p$ .
- Un **hyperplan** de  $E$  est un sev de  $E$  qui admet une droite vectorielle comme supplémentaire dans  $E$ . Dans ce cas, pour tout vecteur  $\vec{b} \notin H$ , on a  $H \oplus \text{Vect}(\vec{b}) = E$ .

## Exercices

**Exercice 1** Donner la décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{C}$  de la fraction  $F(X) = \frac{1}{X^n - 1}$  (où  $n \geq 2$ ).

**Exercice 2** L'ensemble  $\mathcal{B}$  des suites réelles bornées est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

**Exercice 3** L'ensemble  $\mathcal{L}$  des fonctions lipschitziennes sur  $I$ , intervalle de  $\mathbb{R}$ , à valeurs réelles, est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On rappelle qu'une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est **lipschitzienne** s'il existe une constante  $C \geq 0$  telle que  $f$  est  $C$ -lipschitzienne (i.e) pour tout  $(x, y) \in I^2$ ,  $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ . Ainsi :  
 $(f \in \mathcal{L}) \Leftrightarrow (\exists C_f \in \mathbb{R}^+, \forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq C_f|x - y|)$ .

**Exercice 4** Soit  $A$  et  $B$ , deux sev d'un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$ . On a l'équivalence suivante :  
 $(A \cup B \text{ est un sev de } E) \Leftrightarrow (A \subset B \text{ ou } B \subset A)$ .

**Exercice 5** Montrer que  $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0 \text{ et } \int_0^1 P(t) dt = 0 \right\}$  est un plan vectoriel.

**Exercice 6** Dans  $E = \mathbb{R}^3$ , soit  $H = \{(x, y, z) \in E \mid x - y + 2z = 0\}$  et  $\Delta = \text{vect}(\vec{a})$  avec  $\vec{a} = (1, 1, 1)$ . Montrer :  $H \oplus \Delta = E$  et donner une expression de  $p(\vec{v})$ , projeté du vecteur  $\vec{v}$  sur  $H$  dans la direction  $\Delta$ .

**Exercice 7** Soit  $\mathcal{S}_n$  (respectivement  $\mathcal{A}_n$ ), ensemble des matrices symétriques (respectivement antisymétriques) de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Ce sont des sous-espaces supplémentaires de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Exercice 8** Soit  $\mathcal{P}$  (respectivement  $\mathcal{I}$ ) l'ensemble des applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui sont paires (respectivement impaires). Ce sont des sous-espaces supplémentaires de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .

**Exercice 9** Soit l'espace  $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . On définit  $H = \{f \in E \mid \int_0^\pi f = \int_0^\pi f(t)dt = 0\}$  et  $D = \text{Vect}(\sin)$ . Montrer que  $H$  et  $D$  sont des sous-espaces supplémentaires de  $E$ . Justifier  $H \oplus \text{Vect}(\exp) = E$ . On note  $p$ , le projecteur sur  $H$  selon la direction  $D$  : préciser  $p(\cos)$ ,  $p(\sin)$ ,  $p(\tilde{1})$ .