Semaine n°21 du 17 au 22 mars 2025

Les polynômes

- Ensemble $\mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) : somme, produit, composée de polynômes. Degré d'une somme, d'un produit. Coefficient dominant, polynôme unitaire. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$. Fonction polynomiale associée.
- Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$. Théorème de la division euclidienne. Racines (zéros) d'un polynôme. Caractérisation. Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par le degré. Multiplicité d'une racine. Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ (i.e si $\deg(P) \leqslant n$) et si P possède au moins $n+1$ racines distinctes, alors $P = \tilde{0}$. Notion de polynôme scindé sur $\mathbb{K}$.
- Racines (zéros) d'un polynôme. Caractérisation. Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par le degré. Multiplicité d'une racine. Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ (i.e si $\deg(P) \leqslant n$) et si P possède au moins $n+1$ racines distinctes, alors $P = \tilde{0}$. Si $P(x) = 0$ pour $x \in E$ avec E infini, alors $P = \tilde{0}$. Notion de polynôme scindé sur $\mathbb{K}$.
- Expressions de la somme et du produit des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients.
- Théorème de d'Alembert-Gauss (admis).
- Notion de polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$: catalogue dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$. Décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
- Dérivation formelle d'un polynôme. Linéarité, dérivation d'un produit, dérivée $k^{\text{ième}}$. Formule de Taylor pour les polynômes. Caractérisation de la multiplicité d'une racine à l'aide des dérivées successives. Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ont même multiplicité.
- Expression de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ des fonctions rationnelles à **pôles simples**.

Les espaces vectoriels

- Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Exemples : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont des $\mathbb{K}$-ev.
- Si Ω est un ensemble quelconque (non vide), $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^\Omega$, ensemble des applications de Ω vers $\mathbb{K}$, est un $\mathbb{K}$-ev. Exemple : $\mathbb{K}^\mathbb{N}$, l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, est un $\mathbb{K}$-ev.
- Notion de sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-ev : c'est aussi un $\mathbb{K}$-ev. Caractérisation (partie de E qui contient le vecteur nul de E et est stable par combinaison linéaire). Exemples.
- Sous espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs (ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de cette famille). Notation $\text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$.
- L'intersection d'une famille de sous-espaces de E est un sous-espace de E.

Exercices

Exercice 1 **Unicité** du quotient et du reste dans la division euclidienne d'un polynôme A par un polynôme B non nul (dans $\mathbb{K}[X]$).

Exercice 2 Les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ périodiques sont exactement les polynômes constants.

Exercice 3 Calculer, pour tout entier $n \geqslant 2$, les restes dans la division euclidienne du polynôme A_n par B_1 puis B_2 avec $A_n = (X-3)^{2n} - (X-2)^n + 2$ et $B_1 = (X-3)(X-2)$ et $B_2 = (X-2)^2$.

Exercice 4 Factoriser, sur $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P = X^8 + X^4 + 1$.

Exercice 5 On définit la famille de polynômes (*de Tchebychev ou Chebyshov*) $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X \quad \text{et, pour tout } n \geqslant 2,\ T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}.$$

1. Montrer : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\deg(T_n) = n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$: montrer qu'il y a unicité d'un polynôme P tel que
$$\text{pour tout } \theta \in \mathbb{R},\ P(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$
3. Montrer : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, pour tout réel θ, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
On rappelle la formule de trigonométrie : $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$.
Ainsi on a prouvé que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il y a **existence** et **unicité** d'un polynôme P vérifiant l'égalité $P(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: ce polynôme est T_n, le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Tchebychev.

n	0	1	2	3	4	5	6
$T_n(X)$	1	X	$2X^2-1$	$4X^3-3X$	$8X^4-8X^2+1$	$16X^5-20X^3+5X$	$32X^6-48X^4+18X^2-1$

Exemple : $\cos(5\theta) = 16\cos^5(\theta) - 20\cos^3(\theta) + 5\cos(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
De même : $\cos(6\theta) = T_6(\cos(\theta)) = 32\cos^6(\theta) - 48\cos^4(\theta) + 18\cos^2(\theta) - 1$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 Donner la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ de la fraction $F(X) = \frac{1}{X^n - 1}$ (où $n \geqslant 2$).

Exercice 7 L'ensemble $\mathcal{B}$ des suites réelles bornées est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 8 L'ensemble $\mathcal{L}$ des fonctions lipschitziennes sur I, intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On rappelle qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **lipschitzienne** s'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que f est C-lipschitzienne (i.e) pour tout $(x,y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y|$. Ainsi :

$$(f \in \mathcal{L}) \Leftrightarrow (\exists C_f \in \mathbb{R}^+,\ \forall (x,y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant C_f|x-y|).$$

Exercice 9 Soit A et B, deux sev d'un $\mathbb{K}$-ev E. On a l'équivalence suivante :

$$(A \cup B \text{ est un sev de } E) \Leftrightarrow (A \subset B \text{ ou } B \subset A).$$

Exercice 10 Montrer que $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0 \text{ et } \int_0^1 P(t)\,dt = 0 \right\}$ est un plan vectoriel.