Semaine n°20 du 10 au 15 mars 2025

Les entiers naturels

- Multiples et diviseurs d'un entier naturel. Théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$.
- Notions de PGCD-PPCM de deux entiers naturels.
- Nombres premiers. Existence et unicité de la décomposition d'un entier $n \geqslant 2$ en produit de facteurs premiers.

Ensembles-Dénombrement

- Appartenance, inclusion. Sous-ensembles (parties) d'un ensemble. Intersection, réunion, complémentaire. Propriétés. Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E.
- Fonction indicatrice d'une partie A d'un ensemble E. Lien avec intersection, réunion, complémentaire.
- Rappels sur injection, surjection, bijection.
- Cardinal d'un ensemble fini. Caractérisations de la bijectivité d'une application entre deux ensembles de même cardinal. Opérations sur les cardinaux. Cardinal de l'ensemble des applications entre deux ensembles finis A et B. Notation $\mathcal{F}(A, B) = B^A$. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini. Le cardinal de E^p est $\mathrm{card}(E)^p$ (= nombre de p-listes de E).
- Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n *(p-arrangements)* ($A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ si $0 \leqslant p \leqslant n$, 0 sinon). Nombre d'applications injectives entre deux ensembles finis. Nombre de permutations (bijections de E vers E) d'un ensemble fini E ($n!$ si $\mathrm{card}(E) = n$).
- Nombre de parties à p éléments d'un ensemble de cardinal n *(p-combinaisons)* ($\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ si $0 \leqslant p \leqslant n$, 0 sinon). Rappels des propriétés des coefficients binomiaux. Formule du binôme.

Les polynômes

- Ensemble $\mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) : somme, produit, composée de polynômes. Degré d'une somme, d'un produit. Coefficient dominant, polynôme unitaire. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$. Fonction polynomiale associée.
- Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$. Théorème de la division euclidienne.
- Racines (zéros) d'un polynôme. Caractérisation. Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par le degré. Multiplicité d'une racine. Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ (i.e si $\deg(P) \leqslant n$) et si P possède au moins $n+1$ racines distinctes, alors $P = \tilde{0}$. Si $P(x) = 0$ pour $x \in E$ avec E infini, alors $P = \tilde{0}$. Notion de polynôme scindé sur $\mathbb{K}$.
- Expressions de la somme et du produit des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients.
- Théorème de d'Alembert-Gauss (admis).
- Notion de polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$: catalogue dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$. Décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
- Dérivation formelle d'un polynôme. Linéarité, dérivation d'un produit, dérivée $k^{\text{ième}}$. Formule de Taylor pour les polynômes. Caractérisation de la multiplicité d'une racine à l'aide des dérivées successives.

Exercices

Exercice 1 Preuve de l'**existence** du quotient et du reste dans la division euclidienne dans $\mathbb{N}$.

Exercice 2 Preuve de l'**unicité** du quotient et du reste dans la division euclidienne dans $\mathbb{N}$.

Exercice 3 Soit a et b, des entiers vérifiant $0 \leqslant b < a$.
Comparer les restes et les quotients des divisions euclidiennes de a et b par $a - b$.

Exercice 4 Pour n et p dans $\mathbb{N}$, on pose $u_{n,p} = \dfrac{(2n)!(2p)!}{n!p!(n+p)!}$.

1. Vérifier $u_{n+1,p} + u_{n,p+1} = 4u_{n,p}$: en déduire que $u_{n,p}$ est un entier pour tout n et pour tout p dans $\mathbb{N}$ (indication : on pourra raisonner par récurrence sur n en étudiant la proposition $H(n)$: «pour tout entier $p \geqslant 0$, $u_{n,p}$ est un entier»).
2. En déduire que $\dbinom{n+p}{n}$ divise $\dbinom{2n}{n} \times \dbinom{2p}{p}$.

Exercice 5 Sur l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ d'un ensemble E non vide, on définit la différence symétrique de deux ensembles A et B par : $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

1. Vérifier : $A \triangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.
2. Exprimer la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{A \triangle B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
3. Prouver, pour A, B et C dans $\mathcal{P}(E)$: $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

Exercice 6 Soit E, un ensemble de cardinal $n \geqslant 1$. Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E vérifiant $A \subset B$.

Exercice 7 Quel est le nombre de diagonales d'un polygone à n côtés, avec $n \geqslant 3$ (trois méthodes, au choix) ?

Exercice 8 Quel est le nombre d'anagrammes du mot «*galois*» ? Du mot «*lipschitzienne*» ?

Exercice 9 **Unicité** du quotient et du reste dans la division euclidienne d'un polynôme A par un polynôme B non nul (dans $\mathbb{K}[X]$).

Exercice 10 Les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ périodiques sont exactement les polynômes constants.

Exercice 11 Calculer, pour tout entier $n \geqslant 2$, les restes dans la division euclidienne du polynôme $A_n = (X-3)^{2n} - (X-2)^n + 2$ par $B_1 = (X-3)(X-2)$ puis par $B_2 = (X-2)^2$.

Exercice 12 Factoriser, sur $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P = X^8 + X^4 + 1$.

Exercice 13 On définit la famille de polynômes (*de Tchebychev ou Chebyshov*) $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X \quad \text{et, pour tout } n \geqslant 2,\ T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}.$$

1. Montrer : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\deg(T_n) = n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$: montrer qu'il y a unicité d'un polynôme P tel que
$$\text{pour tout } \theta \in \mathbb{R},\ P(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$
3. Montrer : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, pour tout réel θ, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
   On rappelle la formule de trigonométrie : $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$.
   Ainsi on a prouvé que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il y a **existence** et **unicité** d'un polynôme P vérifiant l'égalité $P(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: ce polynôme est T_n, le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Tchebychev.

n	0	1	2	3	4	5	6
$T_n(X)$	1	X	$2X^2-1$	$4X^3-3X$	$8X^4-8X^2+1$	$16X^5-20X^3+5X$	$32X^6-48X^4+18X^2-1$

Exemple : $\cos(5\theta) = 16\cos^5(\theta) - 20\cos^3(\theta) + 5\cos(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
De même : $\cos(6\theta) = T_6(\cos(\theta)) = 32\cos^6(\theta) - 48\cos^4(\theta) + 18\cos^2(\theta) - 1$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.