Semaine n°19 du 03 au 08 mars 2025

Dérivation

- Dérivabilité, nombre dérivé. Liens avec la continuité, l'existence d'un développement limité d'ordre un. Dérivabilité à droite, à gauche. Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée. Opérations (combinaison linéaire, produit, quotient, composée, réciproque).
- Extremum local : condition nécessaire si dérivabilité. Théorème de Rolle, égalité des accroissements finis, inégalité des accroissements finis.
- Caractérisation de la monotonie d'une fonction dérivable sur un intervalle.
- Théorème de la limite de la dérivée :
  « si f est continue sur I, dérivable sur $I\setminus\{a\}$, si $f'(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$».
  Conséquence :
  « si f est C^0 sur I, C^1 sur $I\setminus\{a\}$, si $f'(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ *(finie)* alors f est C^1 sur I et $f'(a)=\ell$ ».
- Fonctions de classe C^k, C^∞. Opérations. Formule de Leibniz (dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de deux fonctions D^n ou C^n). Brève extension aux fonctions $f : I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{C}$.
- Fonctions convexes : position du graphe par rapport à une sécante ou à une tangente (si dérivable). Caractérisation des fonctions f convexes deux fois dérivables (par $f''\geqslant 0$).

Les entiers naturels

- Multiples et diviseurs d'un entier naturel. Théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$.
- Notions de PGCD-PPCM de deux entiers naturels.
- Nombres premiers. Existence et unicité de la décomposition d'un entier $n\geqslant 2$ en produit de facteurs premiers.

Ensembles-Dénombrement

- Appartenance, inclusion. Sous-ensembles (parties) d'un ensemble. Intersection, réunion, complémentaire. Propriétés. Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E.
- Fonction indicatrice d'une partie A d'un ensemble E. Lien avec intersection, réunion, complémentaire.
- Rappels sur injection, surjection, bijection.
- Cardinal d'un ensemble fini. Caractérisations de la bijectivité d'une application entre deux ensembles de même cardinal. Opérations sur les cardinaux. Cardinal de l'ensemble des applications entre deux ensembles finis A et B. Notation $\mathcal{F}(A,B)=B^A$. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini. Le cardinal de E^p est $\text{card}(E)^p$ (= nombre de p-listes de E).
- Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n *(p-arrangements)* ($A_n^p=\frac{n!}{(n-p)!}$ si $0\leqslant p\leqslant n$, 0 sinon). Nombre d'applications injectives entre deux ensembles finis. Nombre de permutations (bijections de E vers E) d'un ensemble fini E ($n!$ si $\text{card}(E)=n$).
- Nombre de parties à p éléments d'un ensemble de cardinal n *(p-combinaisons)* ($\binom{n}{p}=\frac{n!}{(n-p)!p!}$ si $0\leqslant p\leqslant n$, 0 sinon). Rappels des propriétés des coefficients binomiaux. Formule du binôme.

Exercices

Exercice 1 Montrer : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|\sin(x)-\sin(y)|\leqslant|x-y|$ et $|1-\cos(x)|\leqslant|x|$.

Exercice 2 Montrer, pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\text{sh}(x)>x$.

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ Pour tout $x > 0$: $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$. Déduire : $\left(H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ Montrer que la fonction cos possède un unique point fixe α sur $\mathbb{R}$: justifier $\alpha \in [0,1]$. On définit la suite u par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \cos(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite u converge vers α.

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ Calcul de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f avec $f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-3x}$ et $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 6}}$ On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\text{sh}(x)}$. Montrer qu'il est possible de prolonger f par continuité en 0. Montrer que, ainsi prolongée, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 7}}$ Montrer : pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2}{\pi}\, x \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ est décroissante sur $]0, \pi]$.

$\boxed{\textbf{Exercice 8}}$ Preuve de l'**existence** du quotient et du reste dans la division euclidienne dans $\mathbb{N}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 9}}$ Preuve de l'**unicité** du quotient et du reste dans la division euclidienne dans $\mathbb{N}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 10}}$ Soit a et b, des entiers vérifiant $0 \leqslant b < a$.
Comparer les restes et les quotients des divisions euclidiennes de a et b par $a - b$.

$\boxed{\textbf{Exercice 11}}$ Pour n et p dans $\mathbb{N}$, on pose $u_{n,p} = \dfrac{(2n)!(2p)!}{n!p!(n+p)!}$.

1. Vérifier $u_{n+1,p} + u_{n,p+1} = 4u_{n,p}$: en déduire que $u_{n,p}$ est un entier pour tout n et pour tout p dans $\mathbb{N}$ (indication : on pourra raisonner par récurrence sur n en étudiant la proposition $H(n)$: «pour tout entier $p \geqslant 0$, $u_{n,p}$ est un entier»).
2. En déduire que $\dbinom{n+p}{n}$ divise $\dbinom{2n}{n} \times \dbinom{2p}{p}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 12}}$ Sur l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ d'un ensemble E non vide, on définit la différence symétrique de deux ensembles A et B par : $A \bigtriangleup B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

1. Vérifier : $A \bigtriangleup B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.
2. Exprimer la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{A \bigtriangleup B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
3. Prouver, pour A, B et C dans $\mathcal{P}(E)$: $A \cap (B \bigtriangleup C) = (A \cap B) \bigtriangleup (A \cap C)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 13}}$ Soit E, un ensemble de cardinal $n \geqslant 1$. Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E vérifiant $A \subset B$.

$\boxed{\textbf{Exercice 14}}$ Quel est le nombre de diagonales d'un polygone à n côtés, avec $n \geqslant 3$ (trois méthodes, au choix) ?

$\boxed{\textbf{Exercice 15}}$ Quel est le nombre d'anagrammes du mot «*galois*» ? Du mot «*lipschitzienne*» ?