Semaine n°18 du 09 au 14 février 2026

Fonctions-Limites-Continuité

- Limite finie ou infinie en un point ou en l'infini. Limite à droite, à gauche en un point. Unicité de la limite. Opérations sur les limites.
- Limite de l'image d'une suite par une fonction.
- Limites et inégalités. Théorèmes d'encadrement, de minoration, de majoration. Théorème de la limite monotone.
- Continuité en un point, à droite, à gauche. Prolongement par continuité. Lien avec les suites. Opérations.
- Continuité sur un intervalle. Opérations. Théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un intervalle par une fonction continue. Image d'un segment par une fonction continue (théorème des bornes atteintes : toute fonction **continue** sur un **segment** est **bornée** et **atteint** ses bornes). Théorème de la bijection monotone. Fonctions lipschitziennes.

Dérivation

- Dérivabilité, nombre dérivé. Liens avec la continuité, l'existence d'un développement limité d'ordre un. Dérivabilité à droite, à gauche. Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée. Opérations (combinaison linéaire, produit, quotient, composée, réciproque).
- Extremum local : condition nécessaire si dérivabilité. Théorème de Rolle, égalité des accroissements finis, inégalité des accroissements finis.
- Caractérisation de la monotonie d'une fonction dérivable sur un intervalle.
- <u>Théorème de la limite de la dérivée</u> :
  « si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$, si $f'(x) \underset{\substack{x \to a \\ \neq}}{\longrightarrow} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$».

  <u>Conséquence</u> :
«si f est C^0 sur I, C^1 (ou D^1) sur $I \setminus \{a\}$, si $f'(x) \underset{\substack{x \to a \\ \neq}}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ *(finie)* alors f est C^1 (ou D^1) sur I et $f'(a) = \ell$».

- Fonctions de classe C^k, C^∞. Opérations. Formule de Leibniz (dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de deux fonctions D^n ou C^n).
- Brève extension aux fonctions $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
- Fonctions convexes : position du graphe par rapport à une sécante ou à une tangente (si dérivable). Caractérisation des fonctions f convexes deux fois dérivables (par $f'' \geqslant 0$).

Exercices

Exercice 1 Si $f : [a,b] \to [a,b]$ est une fonction continue, alors elle admet un point fixe.

Exercice 2 Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est T-périodique ($T > 0$) et non constante, alors f n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice 3 Les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, **continues** et vérifiant $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, sont exactement les fonctions linéaires (de la forme $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$).

Exercice 4 Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée, alors $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 Montrer : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|\sin(x) - \sin(y)| \leqslant |x - y|$ et $|1 - \cos(x)| \leqslant |x|$.

Exercice 6 Montrer, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\operatorname{sh}(x) > x$.

Exercice 7 Pour tout $x > 0$: $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$. Déduire : $\left(H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 8 Montrer que la fonction cos possède un unique point fixe α sur $\mathbb{R}$: justifier $\alpha \in [0,1]$. On définit la suite u par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \cos(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite u converge vers α.

Exercice 9 Calcul de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f avec $f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-3x}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10 On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\operatorname{sh}(x)}$. Montrer qu'il est possible de prolonger f par continuité en 0. Montrer que, ainsi prolongée, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 Montrer : pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ est décroissante sur $]0, \pi]$.