

## Semaine n°18 du 24 au 29 février 2025

## Fonctions-Limites-Continuité

- Limite finie ou infinie en un point ou en l'infini. Limite à droite, à gauche en un point. Unicité de la limite. Opérations sur les limites.
- Limite de l'image d'une suite par une fonction.
- Limites et inégalités. Théorèmes d'encadrement, de minoration, de majoration. Théorème de la limite monotone.
- Continuité en un point, à droite, à gauche. Prolongement par continuité. Lien avec les suites. Opérations.
- Continuité sur un intervalle. Opérations. Théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un intervalle par une fonction continue. Image d'un segment par une fonction continue (théorème des bornes atteintes : toute fonction **continue** sur un **segment** est **bornée** et **atteint** ses bornes). Théorème de la bijection monotone. Fonctions lipschitziennes.

## Dérivation

- Dérivabilité, nombre dérivé. Liens avec la continuité, l'existence d'un développement limité d'ordre un. Dérivabilité à droite, à gauche. Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée. Opérations (combinaison linéaire, produit, quotient, composée, réciproque).
- Extremum local : condition nécessaire si dérivabilité. Théorème de Rolle, égalité des accroissements finis, inégalité des accroissements finis.
- Caractérisation de la monotonie d'une fonction dérivable sur un intervalle.
- Théorème de la limite de la dérivée :

« si  $f$  est continue sur  $I$ , dérivable sur  $I \setminus \{a\}$ , si  $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$  alors  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$  ».

Conséquence :

« si  $f$  est  $C^0$  sur  $I$ ,  $C^1$  (ou  $D^1$ ) sur  $I \setminus \{a\}$ , si  $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \mathbb{R}$  (finie) alors  $f$  est  $C^1$  (ou  $D^1$ ) sur  $I$  et  $f'(a) = \ell$  ».

- Fonctions de classe  $C^k$ ,  $C^\infty$ . Opérations. Formule de Leibniz (dérivée  $n^{\text{ième}}$  d'un produit de deux fonctions  $D^n$  ou  $C^n$ ).
- Brève extension aux fonctions  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ .
- Fonctions convexes : position du graphe par rapport à une sécante ou à une tangente (si dérivable). Caractérisation des fonctions  $f$  convexes deux fois dérivables (par  $f'' \geq 0$ ).

## Exercices

**Exercice 1** Si  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  est une fonction continue, alors elle admet un point fixe.

**Exercice 2** Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est  $T$ -périodique ( $T > 0$ ) et non constante, alors  $f$  n'a pas de limite en  $+\infty$ .

**Exercice 3** Les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , **continues** et vérifiant  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , sont exactement les fonctions linéaires (de la forme  $f(x) = ax$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ).

**Exercice 4** Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bornée, alors  $g \circ f$  et  $f \circ g$  sont bornées sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 5** Montrer :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$  et  $|1 - \cos(x)| \leq |x|$ .

**Exercice 6** Montrer, pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $\text{sh}(x) > x$ .

**Exercice 7** Pour tout  $x > 0$  :  $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$ . Dédurre :  $\left( H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)_{n \rightarrow +\infty} \sim \ln(n)$ .

**Exercice 8** Montrer que la fonction  $\cos$  possède un unique point fixe  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$  : justifier  $\alpha \in [0, 1]$ . On définit la suite  $u$  par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \cos(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que la suite  $u$  converge vers  $\alpha$ .

**Exercice 9** Calcul de la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de  $f$  avec  $f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-3x}$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 10** On pose, pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $f(x) = \frac{\sin(x)}{\text{sh}(x)}$ . Montrer qu'il est possible de prolonger  $f$  par continuité en 0. Montrer que, ainsi prolongée, la fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 11** Montrer : pour tout  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$ .

Montrer que la fonction  $\varphi : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$  est décroissante sur  $]0, \pi]$ .