

Semaine n°17 du 03 février au 08 février 2025

Suites réelles - convergence - divergence

- Limite finie, limite infinie d'une suite réelle. Convergence, divergence. Unicité de la limite, opérations sur les limites.
- Théorèmes d'existence de limites (par encadrement, majoration, minoration, limite monotone, suites adjacentes).
- Suite extraite d'une suite. Propriété (si (u_n) admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors toute suite extraite de (u_n) admet aussi ℓ pour limite). Une réciproque : si les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) admettent la même limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors (u_n) admet aussi ℓ comme limite.
- Quelques exemples d'étude de suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Brèves notions de convergence pour les suites à valeurs complexes.

Fonctions-Limites-Continuité

- Limite finie ou infinie en un point ou en l'infini. Limite à droite, à gauche en un point. Unicité de la limite. Opérations sur les limites.
- Limite de l'image d'une suite par une fonction.
- Limites et inégalités. Théorèmes d'encadrement, de minoration, de majoration. Théorème de la limite monotone.
- Continuité en un point, à droite, à gauche. Prolongement par continuité. Lien avec les suites. Opérations.
- Continuité sur un intervalle. Opérations. Théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un intervalle par une fonction continue. Image d'un segment par une fonction continue (théorème des bornes atteintes : toute fonction **continue** sur un **segment** est **bornée** et **atteint** ses bornes). Théorème de la bijection monotone. Fonctions lipschitziennes.

Exercices

Exercice 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$: montrer que $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge sans limite (*deux méthodes*).

Exercice 2 $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$. Montrer que la suite $u = (u_n)_{n \geq 1}$ converge vers $\ell \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Exercice 3 $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$. Montrer que la suite $u = (u_n)_{n \geq 1}$ diverge.

Exercice 4 Vérifier, pour $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. Montrer que la suite $\left(u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)_{n \geq 1}$ converge.

Exercice 5 Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, l'équation « $x^n + x^2 = 1$ » possède, sur $]0, +\infty[$, une unique solution, notée u_n . Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ ainsi construite est monotone et converge vers une limite à préciser.

Exercice 6 Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + i \frac{\pi}{n} \right)^n$.

Exercice 7 Si $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ est une fonction continue, alors elle admet un point fixe.

Exercice 8 Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction T -périodique ($T > 0$) et non constante, alors f n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice 9 Les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, **continues** et vérifiant $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, sont exactement les fonctions linéaires (de la forme $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$).

Exercice 10 Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bornée, alors $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées sur \mathbb{R} .