Semaine n°16 du 27 janvier au 01 février 2025

Les suites «classiques»

- Définition d'une suite : explicite, implicite, par récurrence.
- Monotonie d'une suite. Suite majorée, minorée, bornée. Suite périodique, suite stationnaire.
- Suites arithmétiques, suites géométriques : définition, expression, somme de termes consécutifs. Suites arithmético-géométriques. Suites linéaires récurrentes d'ordre deux, expression.

Suites réelles - convergence - divergence

- Limite finie, limite infinie d'une suite réelle. Convergence, divergence. Unicité de la limite, opérations sur les limites.
- Théorèmes d'existence de limites (par encadrement, majoration, minoration, limite monotone, suites adjacentes).
- Suite extraite d'une suite. Propriété (si (u_n) admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors toute suite extraite de (u_n) admet aussi ℓ pour limite). Une réciproque : si les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) admettent la même limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors (u_n) admet aussi ℓ comme limite.
- Quelques exemples d'étude de suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Brèves notions de convergence pour les suites à valeurs complexes.

Exercices

Exercice 1 Déterminer une expression du terme général de la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :
$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n \quad \text{avec} \quad u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_1 = 4.$$
Montrer qu'il existe des constantes réelles α, β, θ et φ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha\beta^n \cos(n\theta + \varphi)$.

Exercice 2 Déterminer la suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :
$$4u_{n+2} - 8u_{n+1} + 3u_n = 0 \quad \text{avec} \quad u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}(u_n) = 0.$$
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n)$ où $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 3 Déterminer une expression du terme général de la suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :
$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^6}{u_n^9} \quad \text{avec} \quad u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_1 = 1.$$
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$.

Exercice 4 Pour tout entier $n \geqslant 2$, on considère le déterminant d'ordre n : $\Delta_n = \text{dét}(M)$ où la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie par
$$m_{ij} = 2 \text{ si } j = i+1,\ m_{ij} = 1 \text{ si } j = i-1,\ m_{ij} = 3 \text{ si } i = j \text{ et } m_{ij} = 0 \text{ sinon.}$$
Montrer que, pour tout $n \geqslant 4$, $\Delta_n = 3\Delta_{n-1} - 2\Delta_{n-2}$. En déduire Δ_n pour $n \geqslant 2$.

Exercice 5 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$: montrer que $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge sans limite (*deux méthodes*).

Exercice 6 $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Montrer que la suite $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\ell \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Exercice 7 $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Montrer que la suite $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$ diverge.

Exercice 8 Vérifier, pour $k \geqslant 2$, $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. Montrer que la suite $\left(u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\geqslant 1}$ converge.

Exercice 9 Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation «$x^n + x^2 = 1$» possède, sur $]0, +\infty[$, une unique solution, notée u_n. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ainsi construite est monotone et converge vers une limite à préciser.

Exercice 10 Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + i\frac{\pi}{n}\right)^n$.