

Semaine n°15 du 20 au 25 janvier 2025

Ensembles usuels de nombres - Les réels

- Calculs dans \mathbb{R} (révisions) - voir programme n°4.
- Entiers naturels, relatifs, nombres décimaux, rationnels, réels.
- Relation d'ordre \leq dans \mathbb{R} : majorant, minorant, maximum, minimum. Borne supérieure (inférieure) d'une partie non vide et majorée (minorée) de \mathbb{R} . Si A n'est pas majorée, on note $\sup(A) = +\infty$.
- Partie entière. Approximations décimales d'un réel (par excès, par défaut).
- Intervalles de \mathbb{R} . Caractérisation (admise) par convexité.

Les suites «classiques»

- Définition d'une suite : explicite, implicite, par récurrence.
- Monotonie d'une suite. Suite majorée, minorée, bornée. Suite périodique, suite stationnaire.
- Suites arithmétiques, suites géométriques : définition, expression, somme de termes consécutifs. Suites arithmético-géométriques. Suites linéaires récurrentes d'ordre deux, expression.

Suites réelles - convergence - divergence (1^{ère} partie)

- Limite finie, limite infinie d'une suite réelle. Convergence, divergence. Unicité de la limite, opérations sur les limites.
- Théorèmes d'existence de limites (par encadrement, majoration, minoration, limite monotone, suites adjacentes).

Exercices

Exercice 1 Soit A , partie non vide, majorée de \mathbb{R} . Si A possède un maximum, alors celui-ci est unique.

Exercice 2 Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$: $\left\lfloor \frac{nx}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$ (trois méthodes, au choix).

Exercice 3 Soit x , un réel et la suite u définie par $u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$: cette suite converge vers x .

Exercice 4 Soit A et B , deux parties non vides et majorées de \mathbb{R} . On définit un nouvel ensemble $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.
Montrer que $\sup(A)$, $\sup(B)$ et $\sup(A + B)$ existent puis $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 5 Déterminer une expression du terme général de la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :
 $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$ avec $u_0 = 2$ et $u_1 = 4$.
Montrer qu'il existe des constantes réelles α, β, θ et φ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha\beta^n \cos(n\theta + \varphi)$.

Exercice 6 Déterminer la suite réelle $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :
 $4u_{n+2} - 8u_{n+1} + 3u_n = 0$ avec $u_0 = 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 0$.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n)$ où $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Exercice 7 Déterminer une expression du terme général de la suite réelle $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^6}{u_n^9} \quad \text{avec} \quad u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_1 = 1.$$

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$.

Exercice 8 Pour tout entier $n \geq 2$, on considère le déterminant d'ordre n : $\Delta_n = \det(M)$ où la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie par

$$m_{ij} = 2 \text{ si } j = i + 1, m_{ij} = 1 \text{ si } j = i - 1, m_{ij} = 3 \text{ si } i = j \text{ et } m_{ij} = 0 \text{ sinon.}$$

Montrer que, pour tout $n \geq 4$, $\Delta_n = 3\Delta_{n-1} - 2\Delta_{n-2}$. En déduire Δ_n pour $n \geq 2$.

Exercice 9 On pose : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$.
Montrer que la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge sans limite.

Exercice 10 $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$. Montrer que la suite $u = (u_n)_{n \geq 1}$ converge vers $\ell \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Exercice 11 $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$. Montrer que la suite $u = (u_n)_{n \geq 1}$ diverge.

Exercice 12 Vérifier, pour $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. Montrer que la suite $\left(u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)_{n \geq 1}$ converge.