Semaine n°14 du 13 au 18 janvier 2025

Les matrices (révisions) + Déterminant

- Existence et unicité d'une forme multilinéaire et alternée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et valant 1 sur I_n (admis).
- Propriétés du déterminant d'une matrice carrée. Effets des opérations élémentaires (sur les colonnes) sur un déterminant. Déterminant d'une matrice triangulaire.
- Une matrice carrée est inversible <u>si et seulement si</u> son déterminant est non nul.
- Liens entre déterminant et produit, inverse, transposée de matrices. Opérations sur les lignes d'un déterminant.
- Développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.

Ensembles usuels de nombres - Les réels

- Calculs dans $\mathbb{R}$ (révisions) - voir programme n°4.
- Entiers naturels, relatifs, nombres décimaux, rationnels, réels.
- Relation d'ordre $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$: majorant, minorant, maximum, minimum. Borne supérieure (inférieure) d'une partie non vide et majorée (minorée) de $\mathbb{R}$. Si A n'et pas majorée, **on note** $\sup(A) = +\infty$.
- Partie entière. Approximations décimales d'un réel (par excès, par défaut).
- Intervalles de $\mathbb{R}$. Caractérisation (admise) par convexité.

Exercices

$\boxed{\textbf{Exercice 1}}$ Pour tout entier $n \geqslant 2$, on considère le déterminant d'ordre n : $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $\Delta_{n+1} = 2\Delta_n$. En déduire Δ_n.

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ A l'aide de déterminants, résoudre le système suivant où m désigne un paramètre réel :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} mx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & my & + & z & = & m \\ x & + & y & + & mz & = & m^2 \end{array}\right. .$$

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ Soit $A \in \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$, une matrice carrée réelle, antisymétrique, d'ordre $2n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). On définit la matrice $J \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \det(A + xJ)$.

1. Montrer que f est une fonction paire.
2. A l'aide d'opérations sur des colonnes, montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est affine i.e de la forme $f(x) = \alpha x + \beta$. Prouver que f est constante.
3. En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\det(A + xJ) = \det(A)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ Soit A, partie non vide, majorée de $\mathbb{R}$. Si A possède un maximum, alors celui-ci est unique.

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$: $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$ (trois méthodes, au choix).

$\boxed{\textbf{Exercice 6}}$ Soit x, un réel et la suite u définie par $u_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$: cette suite converge vers x.

$\boxed{\textbf{Exercice 7}}$ Soit A et B, deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On définit un nouvel ensemble

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Montrer que $\sup(A)$, $\sup(B)$ et $\sup(A + B)$ existent puis $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.