Semaine n°13 du 06 au 11 janvier 2025

Les matrices - première approche

- Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, combinaison linéaire, multiplication. Toute matrice est combinaison linéaire de matrices élémentaires.
- Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: puissances de matrices carrées, formule du binôme. Ensemble de matrices diagonales, triangulaires supérieures, inférieures : stabilité par combinaison linéaire et produit.
- Matrices carrées inversibles, inverse d'une matrice, inverse d'un produit de matrices inversibles, ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
- Matrices d'opérations élémentaires : de transvection, de transposition (= permutation), de dilatation. Inversibilité de ces matrices. Traduction des opérations sur les lignes par produits à gauche par ces matrices.
- Interprétation matricielle des systèmes linéaires. Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice par l'existence d'un inverse à droite **ou** à gauche. Calcul de l'inverse d'une matrice par opérations élémentaires ou par résolution d'un système.
- Transposée d'une matrice, transposée d'une somme, d'un produit, d'un inverse (notation A^T). Matrices symétriques, antisymétriques.

Déterminant

- Existence et unicité d'une forme multilinéaire et alternée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et valant 1 sur I_n (admis).
- Propriétés du déterminant d'une matrice carrée. Effets des opérations élémentaires (sur les colonnes) sur un déterminant. Déterminant d'une matrice triangulaire.
- Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.
- Liens entre déterminant et produit, inverse, transposée de matrices. Opérations sur les lignes d'un déterminant.
- Développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.

Exercices

Exercice 1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A \times B = B \times A = \mathrm{I}_n$, alors cette matrice B est unique *(unicité de l'inverse d'une matrice inversible)*.

Exercice 2 Si A et B sont deux matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (avec $n \geqslant 2$), alors le produit $A \times B$ est aussi une matrice triangulaire supérieure.

Exercice 3 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. On pose $J = A - 2I$: calculer J^2, en déduire J^k pour tout $k \geqslant 0$ puis une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $A = I + P$: calculer P^3, en déduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 Décrire, en fonction de la valeur de m, l'ensemble des solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} mx & + & y & = & m+1 \\ x & + & my & = & 2 \end{array} \right.$$

Exercice 6 Pour tout entier $n \geqslant 2$, on considère le déterminant d'ordre n : $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $\Delta_{n+1} = 2\Delta_n$. En déduire Δ_n.

Exercice 7 A l'aide de déterminants, résoudre le système suivant où m désigne un paramètre réel :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} mx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & my & + & z & = & m \\ x & + & y & + & mz & = & m^2 \end{array} \right. .$$

Exercice 8 Soit $A \in \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$, une matrice carrée réelle, antisymétrique, d'ordre $2n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). On définit la matrice $J \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \det(A + xJ)$.

1. Montrer que f est une fonction paire.
2. A l'aide d'opérations sur des colonnes, montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est affine i.e de la forme $f(x) = \alpha x + \beta$.
3. Montrer que f est constante.
4. En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\det(A + xJ) = \det(A)$.