

## Semaine n°12 du 15 au 19 décembre 2025

**Équations différentielles linéaires du 2<sup>nd</sup> ordre**

- Equation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants :  $y'' + ay' + by = f(x)$ , où  $a, b$  scalaires et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Résolution de l'équation homogène associée :  $y'' + ay' + by = 0$ .
- Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.
- Si  $a$  et  $b$  réels : description des solutions (à valeurs) réelles. Cas particulier ( $a = 0$ ) :  $y''(x) + by(x) = 0$ .
- Principe de superposition.
- Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy (avec la **condition initiale** :  $y(\mathbf{x}_0) = \alpha$  et  $y'(\mathbf{x}_0) = \beta$ ).
- Trouver une solution particulière quand le second membre est de la forme :  $f(x) = Ae^{\lambda x}$  (avec  $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$ ),  $f(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$  (avec  $(A, B, \omega) \in \mathbb{R}^3$ ).

**Les matrices - première approche**

- Ensemble  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , combinaison linéaire, multiplication. Toute matrice est combinaison linéaire de matrices élémentaires.
- Ensemble  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  : puissances de matrices carrées, formule du binôme. Ensemble de matrices diagonales, triangulaires supérieures, inférieures : stabilité par combinaison linéaire et produit.
- Matrices carrées inversibles, inverse d'une matrice, inverse d'un produit de matrices inversibles, ensemble  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ .
- Matrices d'opérations élémentaires : de transvection, de transposition (= permutation), de dilatation. Inversibilité de ces matrices. Traduction des opérations sur les lignes par produits à gauche par ces matrices.
- Interprétation matricielle des systèmes linéaires. Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice par l'existence d'un inverse à droite **ou** à gauche. Calcul de l'inverse d'une matrice par opérations élémentaires ou par résolution d'un système.
- Transposée d'une matrice, transposée d'une somme, d'un produit, d'un inverse (notation  $A^T$ ). Matrices symétriques, antisymétriques.

**Exercices**

**Exercice 1** Résoudre l'équation différentielle  $(E)$  : «  $x^2y''(x) + y(x) = 0$  » sur l'intervalle  $I = ]0, +\infty[$  à l'aide du changement de variable  $z(t) = y(e^t)$  i.e  $y(x) = z(\ln x)$ .

**Exercice 2** Déterminer toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dérivables une fois sur  $\mathbb{R}$  et vérifiant la condition :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x$ .

**Exercice 3** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  : s'il existe une matrice  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $A \times B = B \times A = I_n$ , alors cette matrice  $B$  est unique (*unicité de l'inverse d'une matrice inversible*).

**Exercice 4** Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices triangulaires supérieures de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  (avec  $n \geq 2$ ), alors le produit  $A \times B$  est aussi une matrice triangulaire supérieure.

**Exercice 5** Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ . On pose  $J = A - 2I$  : calculer  $J^2$ , en déduire  $J^k$  pour tout  $k \geq 0$  puis une expression de  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 6** Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . On pose  $A = I + P$  : calculer  $P^3$ , en déduire une expression de  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 7** Décrire, en fonction de la valeur de  $m$ , l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} mx + y = m+1 \\ x + my = 2 \end{cases}$$