Semaine n°12 du 16 au 20 décembre 2024

Équations différentielles linéaires du 2nd ordre

- Equation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants : $y'' + ay' + by = f(x)$, où a, b scalaires et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Résolution de l'équation homogène associée : $y'' + ay' + by = 0$.
- Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.
- Si a et b réels : description des solutions (à valeurs) réelles. Cas particulier $(a = 0)$: $y''(x) + by(x) = 0$.
- Principe de superposition.
- Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy (avec la **condition initiale** : $y(\boldsymbol{x_0}) = \alpha$ et $y'(\boldsymbol{x_0}) = \beta$).
- Trouver une solution particulière quand le second membre est de la forme : $f(x) = Ae^{\lambda x}$ (avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$), $f(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ (avec $(A, B, \omega) \in \mathbb{R}^3$).

Les matrices - première approche

- Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, combinaison linéaire, multiplication. Toute matrice est combinaison linéaire de matrices élémentaires.
- Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: puissances de matrices carrées, formule du binôme. Ensemble de matrices diagonales, triangulaires supérieures, inférieures : stabilité par combinaison linéaire et produit.
- Matrices carrées inversibles, inverse d'une matrice, inverse d'un produit de matrices inversibles, ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
- Matrices d'opérations élémentaires : de transvection, de transposition (= permutation), de dilatation. Inversibilité de ces matrices. Traduction des opérations sur les lignes par produits à gauche par ces matrices.
- Interprétation matricielle des systèmes linéaires. Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice par l'existence d'un inverse à droite **ou** à gauche. Calcul de l'inverse d'une matrice par opérations élémentaires ou par résolution d'un système.
- Transposée d'une matrice, transposée d'une somme, d'un produit, d'un inverse (notation A^T). Matrices symétriques, antisymétriques.

Exercices

Exercice 1 Résoudre l'équation différentielle (E) : « $x^2 y''(x) + y(x) = 0$ » sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ à l'aide du changement de variable $z(t) = y(e^t)$ i.e $y(x) = z(\ln x)$.

Exercice 2 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables une fois sur $\mathbb{R}$ et vérifiant la condition : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f(-x) = e^x$.

Exercice 3 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A \times B = B \times A = \mathrm{I}_n$, alors cette matrice B est unique *(unicité de l'inverse d'une matrice inversible)*.

Exercice 4 Si A et B sont deux matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (avec $n \geqslant 2$), alors le produit $A \times B$ est aussi une matrice triangulaire supérieure.

Exercice 5 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. On pose $J = A - 2I$: calculer J^2, en déduire J^k pour tout $k \geqslant 0$ puis une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $A = I + P$: calculer P^3, en déduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 Décrire, en fonction de la valeur de m, l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ x + my = 2 \end{cases}$$