Semaine n°11 du 08 au 13 décembre 2025

Équations différentielles linéaires du 1^{er} ordre

- Résolution des équations différentielles de la forme $y'+a(x)y=b(x)$ où a et b sont des fonctions continues sur I, intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles (ou complexes). Cas où a est constante.
- Forme des solutions : somme d'une solution particulière de («$y'+a(x)y=b(x)$») et de la solution générale de l'équation homogène («$y'+a(x)y=0$»).
- Principe de superposition. Méthode de la variation de la constante.
- Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy (EDL_1 avec condition initiale $\boldsymbol{y(x_0)}=\alpha$).

Équations différentielles linéaires du 2^{nd} ordre

- Equation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants : $y''+ay'+by=f(x)$, où a, b scalaires et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Résolution de l'équation homogène associée : $y''+ay'+by=0$.
- Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.
- Si a et b réels : description des solutions (à valeurs) réelles.
  Cas particulier ($a=0$) : $y''(x)+by(x)=0$.
- Principe de superposition.
- Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy
  (avec la **condition initiale** : $\boldsymbol{y(x_0)}=\alpha$ et $\boldsymbol{y'(x_0)}=\beta$).
- Trouver une solution particulière quand le second membre est de la forme :
  $f(x)=Ae^{\lambda x}$ (avec $(A,\lambda)\in\mathbb{C}^2$), $f(x)=A\cos(\omega x)+B\sin(\omega x)$ (avec $(A,B,\omega)\in\mathbb{R}^3$).

Exercices

$\boxed{\textbf{Exercice 1}}$ Soit $a:I\to\mathbb{R}$, fonction continue. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de l'équation homogène «$y'(x)+a(x)y(x)=0$» est stable par combinaison linéaire.

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ Les fonctions $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, **dérivables** sur $\mathbb{R}$ et vérifiant

« $\forall (s,t)\in\mathbb{R}^2,\ g(s+t)=g(s)\times g(t)$ »

sont exactement (où a est une constante dans $\mathbb{C}$) :

la fonction constante nulle $\tilde{0}$ et les fonctions du type $f_a : x\mapsto e^{ax}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=x^2.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ Résoudre l'équation différentielle (E) : « $x^2y''(x)+y(x)=0$ » sur l'intervalle $I=]0,+\infty[$ à l'aide du changement de variable $z(t)=y(e^t)$ i.e $y(x)=z(\ln x)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dérivables une fois sur $\mathbb{R}$ et vérifiant la condition : $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)+f(-x)=e^x$.