Semaine n°10 du 01 au 06 décembre 2025

Développements limités

- Développement limité d'ordre n d'une fonction f au voisinage de a. Unicité. Troncature.
- Combinaison linéaire, produit, quotient, primitivation d'un DL.
- Obtention du $\mathrm{DL}_n(a)$ par la formule de Taylor-Young pour une fonction f de classe C^n sur I, intervalle contenant a (ou f de classe C^n au voisinage de a).
- DL à tout ordre au voisinage de 0 de : exp, sin, cos, Arctan, sh, ch, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, $x \mapsto \ln(1+x)$. DL(0) à l'ordre 3 pour tan.
- Applications : étude locale d'une fonction (prolongement par continuité, étude de la dérivabilité de ce prolongement, position relative locale de la courbe et de la tangente), détermination d'asymptotes, recherche d'équivalents, calculs de limites.

Équations différentielles linéaires du 1^er^ ordre

- Résolution des équations différentielles de la forme $y'+a(x)y = b(x)$ où a et b sont des fonctions continues sur I, intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles (ou complexes). Cas où a est constante.
- Forme des solutions : somme d'une solution particulière de («$y' + a(x)y = b(x)$») et de la solution générale de l'équation homogène («$y' + a(x)y = 0$»).
- Principe de superposition. Méthode de la variation de la constante.
- Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy (EDL_1 avec condition initiale $y(x_0) = \alpha$).

Exercices

Exercice 1 Etablir le développement limité de tan à l'ordre 6 au voisinage de 0 (8 méthodes, au choix) : $\boxed{\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^6)}$.

Exercice 2 Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$.
Etude locale (tangente, courbe représentative) au voisinage de 0.

Exercice 3 Déterminer $\mathrm{DL}_3(1)$ de $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.
Etude locale (tangente, courbe représentative) au voisinage de 1.

Exercice 4 Recherche des droites asymptotes de $x \mapsto f(x) = (x-2)\exp\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$.
Position (locale) de $\mathcal{C}_f$ par rapport à ces asymptotes.

Exercice 5 Soit $a : I \to \mathbb{R}$, fonction continue. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de l'équation homogène «$y'(x) + a(x)y(x) = 0$» est stable par combinaison linéaire.

Exercice 6 Les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, **dérivables** sur $\mathbb{R}$ et vérifiant

« $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ g(s+t) = g(s) \times g(t)$ »

sont exactement (où a est une constante dans $\mathbb{C}$) :

la fonction constante nulle $\tilde{0}$ et les fonctions du type $f_a : x \mapsto e^{ax}$.

Exercice 7 Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + \int_0^x t f(t)\mathrm{d}t = x^2.$$