

Semaine n°9 du 25 au 30 novembre 2024

Intégrales et primitives : calculs (révisions)

Comparaison de fonctions.

- Notion de domination, prépondérance, équivalence de fonctions au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Obtention d'un équivalent par encadrement.
- Propriétés. Applications (calculs de limites, étude locale du signe au voisinage de a).
- Équivalents et relations de comparaisons pour les fonctions usuelles.

Développements limités

- Développement limité d'ordre n d'une fonction f au voisinage de a . Unicité. Troncature.
- Combinaison linéaire, produit, quotient, primitivation d'un DL.
- Obtention du $DL_n(a)$ par la formule de Taylor-Young pour une fonction f de classe C^n sur I , intervalle contenant a (ou f de classe C^n au voisinage de a).
- DL à tout ordre au voisinage de 0 de : \exp , \sin , \cos , Arctan , sh , ch , $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, $x \mapsto \ln(1+x)$. DL(0) à l'ordre 3 pour \tan .
- Applications : étude locale d'une fonction (prolongement par continuité, étude de la dérivabilité de ce prolongement, position relative locale de la courbe et de la tangente), détermination d'asymptotes, recherche d'équivalents, calculs de limites.

Exercices

Exercice 1 Équivalent, lorsque $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, de $f(x) = e^{\sin(x)} - e$. Puis calcul de $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{e^{\sin(x)} - e}{\sin^2(2x)} \right)$.

Exercice 2 On pose $f(x) = \frac{2^x - 1}{3^x - 1}$: calcul des limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x))$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))$.

Exercice 3 Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))$, où $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^\alpha}$, en fonction de α , constante réelle.

Exercice 4 Montrer $\text{Arccos}(x) \underset{1^-}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$, puis calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{\text{Arccos}(x)}{\ln(x)} \right)$.

Exercice 5 Soit $f : x \mapsto f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Ensemble de définition ? Donner des équivalents simples de $f(x)$ pour x au voisinage de 1 puis de $+\infty$.

Exercice 6 Etablir le développement limité de \tan à l'ordre 6 au voisinage de 0 (8 méthodes, au choix) : $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$.

Exercice 7 Déterminer le $DL_2(0)$ de $f(x) = \exp\left(\frac{1}{1+x}\right)$.
Etude locale (tangente, courbe représentative) au voisinage de 0.

Exercice 8 Déterminer $DL_3(1)$ de $g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.
Etude locale (tangente, courbe représentative) au voisinage de 1.

Exercice 9 Recherche des droites asymptotes de $x \mapsto f(x) = (x-2) \exp\left(\frac{1}{1+x}\right)$.
Position (locale) de \mathcal{C}_f par rapport à ces asymptotes.