Semaine n°8 du 17 au 22 novembre 2025

Intégrales et primitives : calculs

- Primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Dérivée de $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

  Condition suffisante d'existence de $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$:

  « si f est **définie** et **continue** sur le **segment** $[a,b]$ ou $[b,a]$.»
- Intégration par parties pour des fonctions de classe C^1.
- Changement de variables.
- Primitives des fonctions usuelles, primitives de dérivées de fonctions composées, primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$, $x \mapsto e^{\alpha x}$, $x \mapsto \cos(bx)e^{ax}$, $x \mapsto \sin(bx)e^{ax}$.
  Notions de décomposition en éléments simples de fractions rationnelles à pôles simples.
- Exemples de calculs d'intégrales et de primitives.

Comparaison de fonctions.

- Notion de domination, prépondérance, équivalence de fonctions au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Obtention d'un équivalent par encadrement.
- Propriétés. Applications (calculs de limites, étude locale du signe au voisinage de a).
- Equivalents et relations de comparaisons pour les fonctions usuelles.

Exercices

Exercice 1 Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t$. Calcul de I_0, I_1. Montrer : pour tout $n \geqslant 2$, $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$. En déduire que la suite $\left(u_n = (n+1)I_nI_{n+1}\right)_{n\geqslant 0}$ est constante.

Exercice 2 Existence et calcul de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variables $x = \cos(t)$.

Exercice 3 Ensemble de définition, dérivabilité et dérivée de la fonction $f : x \mapsto f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-t^2}}{1+t}\mathrm{d}t$.

Exercice 4 Equivalent, lorsque $x \to \dfrac{\pi}{2}$, de $f(x) = e^{\sin(x)} - e$. Puis calcul de $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{e^{\sin(x)} - e}{\sin^2(2x)}\right)$.

Exercice 5 On pose $f(x) = \dfrac{2^x-1}{3^x-1}$: calcul des limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(f(x))$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(f(x))$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0}(f(x))$.

Exercice 6 Calcul de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(f(x))$, où $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^\alpha}$, en fonction de α, constante réelle.

Exercice 7 Montrer $\operatorname{Arccos}(x) \underset{1^-}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$, puis calculer $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\operatorname{Arccos}(x)}{\ln(x)}\right)$.

Exercice 8 Soit $f : x \mapsto f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$. Ensemble de définition ? Donner des équivalents simples de $f(x)$ pour x au voisinage de 1 puis de $+\infty$.