

Semaine n°8 du 18 au 23 novembre 2024

Intégrales et primitives : calculs

- Primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Dérivée de $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$.

Condition suffisante d'existence de $\int_a^b f(t)dt$:

« si f est **définie** et **continue** sur le **segment** $[a, b]$ ou $[b, a]$. »

- Intégration par parties pour des fonctions de classe C^1 .
- Changement de variables.
- Primitives des fonctions usuelles, primitives de dérivées de fonctions composées, primitives de $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$, $x \mapsto e^{\alpha x}$, $x \mapsto \cos(bx)e^{\alpha x}$, $x \mapsto \sin(bx)e^{\alpha x}$.
Notions de décomposition en éléments simples de fractions rationnelles à pôles simples.
- Exemples de calculs d'intégrales et de primitives.

Comparaison de fonctions.

- Notion de domination, prépondérance, équivalence de fonctions au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
Obtention d'un équivalent par encadrement.
- Propriétés. Applications (calculs de limites, étude locale du signe au voisinage de a).
- Équivalents et relations de comparaisons pour les fonctions usuelles.

Exercices

Exercice 1 Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt$. Calcul de I_0, I_1 . Montrer : pour tout $n \geq 2$, $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$.
En déduire que la suite $(u_n = (n+1)I_n I_{n+1})_{n \geq 0}$ est constante.

Exercice 2 Existence et calcul de l'intégrale $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$ à l'aide du changement de variables $x = \cos(t)$.

Exercice 3 Ensemble de définition, dérivabilité et dérivée de la fonction $f : x \mapsto f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t^2}}{1+t} dt$.

Exercice 4 Équivalent, lorsque $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, de $f(x) = e^{\sin(x)} - e$. Puis calcul de $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{e^{\sin(x)} - e}{\sin^2(2x)} \right)$.

Exercice 5 On pose $f(x) = \frac{2^x - 1}{3^x - 1}$: calcul des limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x))$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))$.

Exercice 6 Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))$, où $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^\alpha}$, en fonction de α , constante réelle.

Exercice 7 Montrer $\operatorname{Arccos}(x) \underset{1^-}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$, puis calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{\operatorname{Arccos}(x)}{\ln(x)} \right)$.

Exercice 8 Soit $f : x \mapsto f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Ensemble de définition ? Donner des équivalents simples de $f(x)$ pour x au voisinage de 1 puis de $+\infty$.