Semaine n°7 du 10 au 15 novembre 2025

Les fonctions trigonométriques réciproques.

- Rappels sur les fonctions trigonométriques. Inégalité : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leqslant |x|$.
  Limites : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan(x)}{x}\right) = 1$, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right) = \frac{1}{2}$.
- Définition des fonctions Arcsin, Arccos, Arctan. Représentations graphiques, propriétés, dérivées. Relation $\mathrm{Arcsin}(x) + \mathrm{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [-1, +1]$.
- Application : détermination d'un argument d'un nombre complexe non nul.
- Brèves notions de dérivées et d'intégrales de fonctions $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Intégrales et primitives : calculs

- Primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Dérivée de $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.
  Condition suffisante d'existence de $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$:
  « si f est **définie** et **continue** sur le **segment** $[a, b]$ ou $[b, a]$. »
- Intégration par parties pour des fonctions de classe C^1.
- Changement de variables.
- Primitives des fonctions usuelles, primitives de dérivées de fonctions composées, primitives de $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$, $x \mapsto e^{\alpha x}$, $x \mapsto \cos(bx)e^{ax}$, $x \mapsto \sin(bx)e^{ax}$.
  Notions de décomposition en éléments simples de fractions rationnelles à pôles simples.
- Exemples de calculs d'intégrales et de primitives.

Exercices

Exercice 1 Résoudre : $\mathrm{Arcsin}(2x) = \mathrm{Arccos}(x)$.

Exercice 2 Montrer que, pour tout $x \in [-1, +1]$: $\cos(\mathrm{Arcsin}(x)) = \sin(\mathrm{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

Exercice 3 Montrer : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

Exercice 4 Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = (\text{signe de } x) \times \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 5 Etude et représentation graphique de $f : x \mapsto \mathrm{Arcsin}(\sin x)$.

Exercice 6 Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t$. Calcul de I_0, I_1. Montrer : pour tout $n \geqslant 2$, $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$.
En déduire que la suite $(u_n = (n+1)I_nI_{n+1})_{n\geqslant 0}$ est constante.

Exercice 7 Existence et calcul de l'intégrale $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variables $x = \cos(t)$.

Exercice 8 Ensemble de définition, dérivabilité et dérivée de la fonction $f : x \mapsto f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t^2}}{1+t}\mathrm{d}t$.