

## Semaine n°6 du 04 au 09 novembre 2024

### Les fonctions usuelles

- Fonctions logarithme népérien, exponentielle, puissances : définitions, propriétés, limites, croissances comparées. Calcul de  $\frac{d(u(x)^{v(x)})}{dx}$ .
- Fonctions hyperboliques : ch et sh. Propriétés, graphes, dérivées. Relations  $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$ ,  $\text{ch}(x) + \text{sh}(x) = e^x$ ,  $\text{ch}(x) - \text{sh}(x) = e^{-x}$ . Limites :  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\text{sh}(x)}{x} \right) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\text{ch}(x) - 1}{x^2} \right) = \frac{1}{2}$ .

### Les fonctions trigonométriques réciproques.

- Rappels sur les fonctions trigonométriques. Inégalité :  $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$ .  
Limites :  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan(x)}{x} \right) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \right) = \frac{1}{2}$ .
- Définition des fonctions Arcsin, Arccos, Arctan. Représentations graphiques, propriétés, dérivées. Relation  $\text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}$  pour tout  $x \in [-1, +1]$ .
- Application : détermination d'un argument d'un nombre complexe non nul.
- Brèves notions de dérivées et d'intégrales de fonctions  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ .

### Exercices

**Exercice 1** Ensemble de définition et limites aux bords de la fonction  $f : x \mapsto f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ .

**Exercice 2** Soit  $f : x \mapsto f(x) = x^x$  : variations, limites aux bords et tracé précis de la courbe représentative.

**Exercice 3** Ensemble de définition, parité et dérivée de  $g : x \mapsto g(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ .

**Exercice 4** Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a :  $(y = \text{sh}(x)) \Leftrightarrow (x = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}))$ .

**Exercice 5** Pour  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , montrer une des deux égalités (au choix) :  
 $\text{sh}(a + b) = \text{sh}(a)\text{ch}(b) + \text{sh}(b)\text{ch}(a)$  et  $\text{ch}(a + b) = \text{ch}(a)\text{ch}(b) + \text{sh}(a)\text{sh}(b)$ .

**Exercice 6** Résoudre :  $\text{Arcsin}(2x) = \text{Arccos}(x)$ .

**Exercice 7** Montrer que, pour tout  $x \in [-1, +1]$  :  
 $\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$ .

**Exercice 8** Montrer :  $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$ .

**Exercice 9** Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  :  
 $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = (\text{signe de } x) \times \frac{\pi}{2}$ .

**Exercice 10** Etude et représentation graphique de  $f : x \mapsto \text{Arcsin}(\sin x)$ .