

Semaine n°5 du 13 au 18 octobre 2025

Généralités sur les fonctions $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- Calculs dans \mathbb{R} , manipulation d'égalités, d'inégalités. Valeur absolue d'un réel.
- Propriétés usuelles des fonctions : parité, périodicité, monotonie, majorée, minorée, bornée.
- Théorème de la bijection pour une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle.
- Dérivation : rappels. Equation d'une tangente. Fonctions de classe C^1 . Dérivée de la réciproque d'une bijection. Inégalité des Accroissements Finis, application à l'étude de suites contractantes.

Les fonctions usuelles

- Fonctions logarithme népérien, exponentielle, puissances : définitions, propriétés, limites, croissances comparées. Calcul de $\frac{d(u(x)^{v(x)})}{dx}$.
- Fonctions hyperboliques : ch et sh. Propriétés, graphes, dérivées. Relations $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$, $\text{ch}(x) + \text{sh}(x) = e^x$, $\text{ch}(x) - \text{sh}(x) = e^{-x}$. Limites : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{sh}(x)}{x} \right) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{ch}(x) - 1}{x^2} \right) = \frac{1}{2}$.

Exercices

Exercice 1 Si $x \in]-1, +1[$ et $y \in]-1, +1[$ alors $z = \frac{x+y}{1+xy} \in]-1, +1[$.

Exercice 2 Résoudre $x - 1 = \sqrt{x+2}$.

Exercice 3 Résoudre $x - 3 \geq \sqrt{x^2 - 2x}$.

Exercice 4 Soit $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$: montrer que f réalise une bijection de $[\frac{\pi}{2}, \pi[$ vers un intervalle J à préciser. Montrer que la réciproque $g = f^{-1}$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer $g'(t)$ pour tout $t \in]1, +\infty[$.

Exercice 5 Montrer que l'équation $e^{-x/2} = x$ possède une unique solution, notée ℓ , avec $\ell \in [0, 1]$. Soit la suite u , définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = e^{-u_n/2} = f(u_n)$: montrer que $u_n \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, que f est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur $[0, 1]$, que $|u_n - \ell| \leq (\frac{1}{2})^n |u_0 - \ell|$ et u converge vers ℓ . Indiquer un procédé permettant d'obtenir une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

Exercice 6 Ensemble de définition et limites aux bords de la fonction $f : x \mapsto f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Exercice 7 Soit $f : x \mapsto f(x) = x^x$: variations, limites aux bords et tracé précis de la courbe représentative.

Exercice 8 Ensemble de définition, parité et dérivée de $g : x \mapsto g(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

Exercice 9 Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $(y = \text{sh}(x)) \Leftrightarrow (x = \ln(y + \sqrt{1+y^2}))$.

Exercice 10 Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, montrer une des deux égalités (au choix) :
 $\text{sh}(a+b) = \text{sh}(a)\text{ch}(b) + \text{sh}(b)\text{ch}(a)$ et $\text{ch}(a+b) = \text{ch}(a)\text{ch}(b) + \text{sh}(a)\text{sh}(b)$.