Semaine n°3 du 29 septembre au 04 octobre 2025

Les nombres complexes ($1^{\text{ère}}$ partie)

- Parties réelle, imaginaire. Conjugaison. Module. Opérations sur les nombres complexes, propriétés. Inégalités triangulaires, cas d'égalité. Affixe d'un point, d'un vecteur. Cercle, disque.
- Rappel : calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$, formule du binôme.
- Cercle trigonométrique $\mathbb{U}$. Rappels sur les fonctions cos, sin. Définition de la fonction tan. Formulaire usuel. Factorisation de $1 \pm e^{i\theta}$. Formule d'Euler, de Moivre. Application à la linéarisation. Argument d'un nombre complexe. Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$. Transformation $a\cos(x) + b\sin(x) = A\cos(x - \varphi)$.
- Exponentielle d'un nombre complexe. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) \neq 0$. L'application
$$\exp : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z = x + iy & \longmapsto & \exp(z) = e^x e^{iy} = e^x\left(\cos(y) + i\sin(y)\right) \end{array} \right.$$
est **surjective**, mais **pas injective**.
$(\exp(z) = 1) \Leftrightarrow (z \in 2i\pi\mathbb{Z}$ i.e $\exists k \in \mathbb{Z},\ z = 2ik\pi)$ et $(\exp(z) = \exp(z')) \Leftrightarrow (z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z})$.

Les nombres complexes (2^{nde} partie)

- Racines carrées d'un nombre complexe non nul. Résolution des équations du second degré. Somme et produit des racines.
- Racines n-ièmes de l'unité. Ensemble $\mathbb{U}_n$. Résolution de $z^n = a \in \mathbb{C}^*$ avec a sous forme trigonométrique.
- Factorisation d'un polynôme P par $P(z) = (z - a)Q(z)$ avec Q polynôme lorsque a est une racine de P (i.e $P(a) = 0$).
- Traduction de l'alignement/orthogonalité au moyen d'affixes.
Transformations $z \to e^{i\theta}z$, $z \to z + b$, $z \to kz$, $z \to \bar{z}$.

Exercices

Exercice 1 Si $|z| \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, $\left|\dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\right| \leqslant \dfrac{1 - |z|^{n+1}}{1 - |z|}$.

Exercice 2 Montrer que la suite $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée, avec
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k) = 1 + \cos(1) + \cos(2) + \cdots + \cos(n).$$

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calcul de la somme et du produit des n racines n-ièmes de l'unité.

Exercice 4 Soit un entier $n \geqslant 2$.

1. Déterminer toutes les racines du polynôme $P(X) = X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X^2 + X + 1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^k$.
2. Justifier $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left|1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right| = n$. En déduire l'égalité $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.