

Semaine n°3 du 30 septembre au 05 octobre 2024

Les nombres complexes (1^{ère} partie)

- Parties réelle, imaginaire. Conjugaison. Module. Opérations sur les nombres complexes, propriétés. Inégalités triangulaires, cas d'égalité. Affixe d'un point, d'un vecteur. Cercle, disque.
- Rappel : calcul de $\sum_{k=0}^n q^k$, formule du binôme.
- Cercle trigonométrique \mathbb{U} . Rappels sur les fonctions cos, sin. Définition de la fonction tan. Formulaire usuel. Factorisation de $1 \pm e^{i\theta}$. Formule d'Euler, de Moivre. Application à la linéarisation. Argument d'un nombre complexe. Calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$. Transformation $a \cos(x) + b \sin(x) = A \cos(x - \varphi)$.
- Exponentielle d'un nombre complexe. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) \neq 0$. L'application

$$\exp : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow \mathbb{C}^* \\ z = x + iy & \longmapsto \exp(z) = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y)) \end{cases}$$
 est **surjective**, mais **pas injective**.
 $(\exp(z) = 1) \Leftrightarrow (z \in 2i\pi\mathbb{Z} \text{ i.e } \exists k \in \mathbb{Z}, z = 2ik\pi)$ et $(\exp(z) = \exp(z')) \Leftrightarrow (z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z})$.

Les nombres complexes (2^{nde} partie)

- Racines carrées d'un nombre complexe non nul. Résolution des équations du second degré. Somme et produit des racines.
- Racines n -ièmes de l'unité. Ensemble \mathbb{U}_n . Résolution de $z^n = a \in \mathbb{C}^*$ avec a sous forme trigonométrique.
- Factorisation d'un polynôme P par $P(z) = (z - a)Q(z)$ avec Q polynôme lorsque a est une racine de P (i.e $P(a) = 0$).
- Traduction de l'alignement/orthogonalité au moyen d'affixes.
 Transformations $z \rightarrow e^{i\theta}z$, $z \rightarrow z + b$, $z \rightarrow kz$, $z \rightarrow \bar{z}$.

Exercices

Exercice 1 Si $|z| \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, $\left| \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \right| \leq \frac{1 - |z|^{n+1}}{1 - |z|}$.

Exercice 2 Montrer que la suite $u = (u_n)_{n \geq 0}$ est bornée, avec

$$u_n = \sum_{k=0}^n \cos(k) = 1 + \cos(1) + \cos(2) + \dots + \cos(n).$$

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calcul de la somme et du produit des n racines n -ièmes de l'unité.

Exercice 4 Soit un entier $n \geq 2$.

1. Déterminer toutes les racines du polynôme $P(X) = X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X^2 + X + 1 = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$.

2. Justifier $\prod_{k=1}^{n-1} \left| 1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right| = n$. En déduire l'égalité $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.