Semaine n°2 du 22 au 27 septembre 2025

Systèmes linéaires - Sommes, produits - Récurrences - Injection, surjection, bijection.

- Résolution d'un système linéaire (n,p) par la méthode du pivot de Gauss avec $(n,p) \in [\![1 \,;\, 3]\!]^2$.
- Sommes et produits d'une famille finie de nombres réels. Sommes et produits télescopiques, exemples de changement d'indices.
  Expressions simplifiées de $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} q^k$. Factorisation de $a^n - b^n$ par $a-b$.
- Sommes doubles. Exemples de sommes triangulaires.
- Rappels sur la factorielle et les coefficients binomiaux. Triangle de Pascal. Formule du binôme.
- Principe de récurrence : récurrence simple, double, forte.
- Rappels succincts sur la notion d'application et la composition d'applications. Injection, surjection, bijection. Notion d'ensemble image. Composée d'injections, de surjections, de bijections. Bijection réciproque. Caractérisation de la bijectivité d'une application. Image directe et réciproque d'une partie par une application (exemples simples par lecture graphique si $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$).

Les nombres complexes (1ère partie)

- Parties réelle, imaginaire. Conjugaison. Module. Opérations sur les nombres complexes, propriétés. Inégalités triangulaires, cas d'égalité. Affixe d'un point, d'un vecteur. Cercle, disque.
- Rappel : calcul de $\sum_{k=0}^{n} q^k$, formule du binôme.
- Cercle trigonométrique $\mathbb{U}$. Rappels sur les fonctions cos, sin. Définition de la fonction tan. Formulaire usuel. Factorisation de $1 \pm e^{i\theta}$. Formule d'Euler, de Moivre. Application à la linéarisation. Argument d'un nombre complexe.
  Calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$. Transformation $a\cos(x) + b\sin(x) = A\cos(x - \varphi)$.
- Exponentielle d'un nombre complexe. L'application
  $$\exp : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z = x+iy & \longmapsto & \exp(z) = e^x e^{iy} = e^x\left(\cos(y) + i\sin(y)\right) \end{array} \right.$$
  est **surjective**, mais **pas injective**.

Exercices

Exercice 1 Pour tout $n \geqslant 2$, simplifier la somme $S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$, puis calculer la limite $\lim_{n\to+\infty} (S_n)$.

Exercice 2 Pour tout $n \geqslant 1$, donner une expression de la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} k2^k$ à l'aide du changement de variable $k = j + 1$.

Exercice 3 Calcul de la somme double $S = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 4 Montrer, pour tout $n \geqslant 1$: $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n} \leqslant \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$.

Exercice 5 Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 17^n - 11^n$ est divisible par 6

Méthode au choix parmi les quatre suivantes : récurrence simple sur n OU récurrence double sur n (en commençant par trouver des entiers a et b tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$) OU preuve directe avec la formule $A^N - B^N = \ldots$ OU preuve directe en remarquant $17 = 11 + 6$ (et formule du binôme).

Exercice 6 Calcul de la somme $\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 3^{k-1}2^{n-k}$.

Exercice 7 Montrer :

1. une composée de deux injections est une injection.
2. une composée de deux surjections est une surjection.
3. une composée de deux bijections est une bijection.

Exercice 8 Soit α, un paramètre réel et l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ -x+y+\alpha z \\ -x+y+3z \end{pmatrix} \end{array} \right.$.

1. Montrer qu'il existe une seule valeur de α pour laquelle f n'est pas bijective. Dans ce cas, préciser si elle est injective, surjective et détailler l'ensemble image $\mathrm{Im}(f)$.
2. Pour $\alpha = 2$, vérifier que f est bijective et préciser la réciproque f^{-1}.

Exercice 9 Si $|z| \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \leqslant \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}$.

Exercice 10 Montrer que la suite $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée, avec

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k) = 1 + \cos(1) + \cos(2) + \cdots + \cos(n).$$