La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront <u>encadrés</u> ou soulignés.

Exercice 1

Soit m, un paramètre réel. On considère le système linéaire $(\mathcal{S})$, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & my & + & z & = & m \\ mx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & mz & = & m \end{array}\right. .$$

1. Déterminer pour quelles valeurs de m le système $(\mathcal{S})$ est de Cramer, et le résoudre uniquement dans ce cas (et avec les formules de Cramer).
2. Déterminer l'ensemble des solutions lorsque le système $(\mathcal{S})$ n'est pas de Cramer.

Exercice 2 Le but de cette question est de **déterminer toutes les fonctions f solutions du problème** $(\mathcal{P})$ suivant :

$$(\mathcal{P}) \text{ « } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ est dérivable et, pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^{2x} f(-x) \text{ ».}$$

1. Montrer que, si f est une solution du problème $(\mathcal{P})$, alors f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et est solution d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre que l'on précisera.
2. Conclure.

Exercice 3 On se propose de résoudre, sur l'intervalle $]0, +\infty[$, l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad 4xy''(x) + 2y'(x) + y(x) = x.$$

Soit y, une fonction deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$. On définit alors la fonction z sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ y(x) = z(\sqrt{x}), \text{ autrement dit } \forall t \in]0, +\infty[,\ z(t) = y(t^2).$$

1. <u>Montrer</u> que y est solution de (E) sur $]0, +\infty[$ <u>si, et seulement si</u> z est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle (G) suivante
$$(G) \qquad z''(t) + z(t) = t^2.$$
2. Résoudre cette équation différentielle (G) sur $]0, +\infty[$.
3. Conclure.

Exercice 4 On note $I = I_3$ la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et M la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Les quatre parties qui suivent sont largement indépendantes.

I - Une première méthode de calcul de M^n

1. Soit la matrice $A = \dfrac{1}{4}(M - I)$.
   Calculer A^2, A^3 puis en déduire une expression simple de A^n pour tout entier $n \geqslant 1$.
2. Exprimer M en fonction de A et de I puis en déduire[1] qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels telle que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = I + \alpha_n A.$$
3. Vérifier que la suite α est arithmético-géométrique. Calculer son terme α_n en fonction de n et en déduire l'expression de M^n pour $n \geqslant 0$.
4. Justifier que M est inversible, et calculer son inverse M^{-1}.
   Vérifier que l'expression trouvée en **(3.)** est encore valable avec $n = -1$.

1. Un raisonnement par récurrence est fortement conseillé ici !

II - Une deuxième méthode de calcul de M^n

On définit la matrice $J = \dfrac{1}{4}(M + 3I)$

1. Calculer J^2 puis J^n pour tout entier naturel non nul n.
   La matrice J est-elle inversible ?
2. Pour tout entier naturel n non nul : déterminer une expression de M^n en fonction de n, I et J. Comparer ce résultat à celui obtenu à la question **(3.)** de la partie **I**.

III - Une troisième méthode de calcul de M^n

1. On définit la fonction P_M sur $\mathbb{R}$ par $P_M(x) = \det(xI - M)$.
   (a) Calculer $P_M(x)$ et montrer que la fonction P_M est polynomiale de degré 3.
   (b) Résoudre $P_M(x) = 0$: on notera λ_1 et λ_2 les deux solutions avec $\lambda_1 < \lambda_2$.
   Pour vérification : il s'agit de deux entiers de signes contraires.
   (c) Pour $i \in \{1, 2\}$, justifier **sans calculs** que le **système homogène**[2], noté $(\mathcal{S}_i)$ de matrice associée $M - \lambda_i I$, admet une infinité de solutions.
   (d) Résoudre le système $(\mathcal{S}_1)$ et en donner une solution notée X_1 de la forme $\begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ 1 \end{pmatrix}$ où les $\bullet$ sont des entiers relatifs (à préciser).
   (e) Montrer que les solutions $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du système $(\mathcal{S}_2)$ s'écrivent sous la forme $yX_2 + zX_3$ où $X_2 = \begin{pmatrix} \bullet \\ 1 \\ \bullet \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ 1 \end{pmatrix}$, et où les $\bullet$ sont des entiers relatifs (à déterminer).
2. Soit $P = (X_1|X_2|X_3) = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & 1 & \bullet \\ 1 & \bullet & 1 \end{pmatrix}$, la matrice dont les colonnes sont les $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant 3}$.
   (a) Montrer que P est inversible.
   (b) Que vaut $P^{-1}P$? <u>Sans calculer P^{-1}</u>, en déduire $P^{-1}X_1$, $P^{-1}X_2$ et $P^{-1}X_3$.
   (c) Que valent MX_1, MX_2 et MX_3 ?
   En déduire MP puis $D = P^{-1}MP$, cela <u>sans calculer P^{-1}</u>.
   (d) Calculer D^n puis en déduire une expression de M^n (on ne demande pas le calcul).

IV - Une dernière méthode de calcul de M^n ?

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par u_0, v_0 et w_0 réels fixés et

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = -7u_n - 8w_n \\ v_{n+1} = 4u_n + v_n + 4w_n \\ w_{n+1} = 4u_n + 5w_n \end{cases}.$$

2. On rappelle qu'il s'agit du système $(M - \lambda_i I)X = 0$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On pose alors $Y_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

1. Exprimer Y_{n+1} en fonction de M et de Y_n, puis Y_n en fonction de M et de Y_0.
2. On pose $r_n = u_n + w_n$. Montrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
   En déduire r_n en fonction de n, u_0 et w_0.
3. Soit $t_n = u_n + 2v_n$. Montrer que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.
4. Montrer qu'il existe une constante $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} + 2u_{n+1} = au_n$.
5. Prouver que, pour tout $n \geqslant 0$,
   $$u_n = \frac{u_0 - u_1}{4}(-3)^n + \frac{3u_0 + u_1}{4}.$$
6. En déduire v_n et w_n en fonction n, u_0, v_0 et w_0. Ce résultat permet-il de retrouver M^n ?

Exercice 5

Attention : dans cet exercice, toutes les suites considérées sont initialisées au rang $n = 1$.

1. Quelques questions préliminaires

   (a) Question de cours : rappeler la **définition** de la *partie entière* d'un réel x.
   Puis recopier, et compléter (**caractérisation** de la partie entière d'un réel x) :
   $$(N = \lfloor x \rfloor) \Leftrightarrow (\quad \ldots \quad \text{ET} \quad \ldots \quad).$$

   (b) **Démontrer** le résultat suivant :
   pour tout réel t et pour tout entier n, $\lfloor t + n \rfloor = \lfloor t \rfloor + n$.

   (c) **Prouver** que, pour tous les réels x et y, on a : $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor$.

   (d) Si on suppose que x et y sont des réels non-entiers et que $x + y$ est un entier (autrement dit $x \notin \mathbb{Z}$, $y \notin \mathbb{Z}$ et $x + y \in \mathbb{Z}$), **montrer** qu'on a :
   $$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = x + y - 1.$$

Notation : dans cet exercice, si $w = (w_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite, T_w désigne l'ensemble des termes de cette suite. Ainsi : $T_w = \{w_1, w_2, w_3, w_4, \ldots\} = \{w_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.
Quelques exemples :
– si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = n$, alors $T_w = \{1, 2, 3, 4, \ldots\} = \mathbb{N}^*$.
– si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = n^2$, alors $T_w = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$.
– si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = (-1)^n$, alors $T_w = \{-1, +1\}$.
– si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \sin(n\frac{\pi}{6})$, alors $T_w = \{-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, +\frac{1}{2}, +\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\}$.

Définition : soit deux suites réelles $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$ et $v = (v_n)_{n\geqslant 1}$.
On dit qu'elles sont **complémentaires dans** $\mathbb{N}^*$ si elles vérifient les quatre propriétés suivantes :
(1) les suites u et v sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \mathbb{N}^*$ et $v_n \in \mathbb{N}^*$.
(2) les suites u et v sont *strictement croissantes.*
(3) $T_u \cup T_v = \mathbb{N}^*$, autrement dit $\{u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots\} \cup \{v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$.
(4) $T_u \cap T_v = \varnothing$, autrement dit $\{u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots\} \cap \{v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots\}$ est vide.

2. Donner un exemple simple (mais explicite) de deux suites complémentaires dans $\mathbb{N}^*$ (vérifiant donc les quatre propriétés précédentes).

Soit α un réel tel que : $\alpha > 1$. On pose $\beta = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}$: on a donc $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$.

On définit ensuite les deux ensembles

$$A = \{\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots\} = \{n\alpha \mid n \in \mathbb{N}^*\} \quad \text{et} \quad B = \{\beta, 2\beta, 3\beta, \ldots\} = \{n\beta \mid n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Enfin, on considère deux suites $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$ et $v = (v_n)_{n\geqslant 1}$ définies par, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_n = \lfloor n\alpha \rfloor \qquad \text{et} \qquad v_n = \lfloor n\beta \rfloor.$$

On se propose de chercher une condition nécessaire et suffisante pour que ces deux suites u et v soient complémentaires dans $\mathbb{N}^*$.

3. Pour commencer : montrer que les suites u et v construites ci-dessus vérifient les conditions **(1)** et **(2)**.
4. <u>On suppose, dans cette question, que α est un nombre rationnel</u> ($\alpha \in \mathbb{Q}$). Il existe donc deux entiers a et b avec $b \neq 0$ tels que $\alpha = \dfrac{a}{b}$.
   (a) β est-il un nombre rationnel ? On rappelle que toute réponse doit être justifiée.
   (b) Montrer que l'intersection de A et B est non vide.
   (c) Que peut-on en conclure ?
5. <u>On suppose, dans cette question, que α est un nombre irrationnel</u> ($\alpha \notin \mathbb{Q}$).
   (a) β est-il un nombre irrationnel ?
   (b) Montrer que l'intersection de A et B est vide. Cela suffit-il à affirmer $T_u \cap T_v = \varnothing$?
   (c) On suppose qu'il existe deux entiers n et m tels que $u_n = v_m = k$ (où $k \in \mathbb{N}^*$) : montrer que cela implique $n + m = k$. Puis conclure à une absurdité. Conséquence ?
   (d) Soit $N \geqslant 2$, un entier naturel : on considère l'intervalle réel (fermé-ouvert) $I_N = [1, N[$. Exprimer p, le nombre d'éléments de $A_N = A \cap I_N$, en fonction de N, α et de la fonction partie entière. Faire de même avec q, le nombre d'éléments de $B_N = B \cap I_N$, en fonction de N, β et de la fonction partie entière.
   (e) Justifier que le nombre d'éléments de $A_N \cup B_N$ est égal à $p + q$.
   En déduire[3] le nombre d'éléments de $(A \cup B) \cap I_N$ en fonction de N.
   (f) Montrer que les suites $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$ et $v = (v_n)_{n\geqslant 1}$ sont complémentaires dans $\mathbb{N}^*$.
6. **Conclure**.

3. On admettra, pour cette question, que la loi «intersection» est distributive sur la loi «union», autrement dit : $(A \cup B) \cap I = (A \cap I) \cup (B \cap I)$. Et on n'oubliera pas les préliminaires...