La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 COURS et APPLICATIONS DU COURS - Questions largement indépendantes

1. Donner les développements limités d'ordre $\boldsymbol{n}$ lorsque $x \to 0$ (notés $\mathrm{DL}_n(0)$) des quantités suivantes (où α désigne une constante réelle) :
   (a) $\mathrm{DL}_{\mathbf{3}}(0)$ de
   $$\tan(x) \qquad \textbf{et} \qquad (1+x)^\alpha \qquad \textbf{et} \qquad \sqrt{1+x}.$$
   (b) $\mathrm{DL}_{\mathbf{5}}(0)$ de
   $$\mathrm{sh}(x) \;\; \textbf{et} \;\; \mathrm{ch}(x) \quad \textbf{et} \quad \sin(x) \;\; \textbf{et} \;\; \cos(x) \;\; \textbf{et} \;\; \ln(1+x) \;\; \textbf{et} \;\; \frac{1}{1+x} \;\; \textbf{et} \;\; \arctan(x) \;\; \textbf{et} \;\; e^x.$$

   Les réponses doivent être écrites sur la feuille jointe à ce sujet (`ne pas oublier de la glisser dans votre copie`).
2. Calculer les valeurs des limites suivantes :
   $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)(e^x-1)}{\cos(x)-1}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^x-1}{\ln(x)}\right).$$
3. Donner les solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donc à valeurs réelles, de chacune des équations différentielles suivantes :
   (a) (E_1) « $3y'' + 5y' - 2y = 10$ ».
   (b) (E_2) « $y'' + 8y' + 16y = 2e^{-2x}$ ».
   (c) (E_3) « $y'' + y' + y = \sin(x)$ ».
4. Donner les solutions $y :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle suivante et vérifiant $y(1) = 2$:
   $$xy'(x) + 2y(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}.$$
5. Pour tout paramètre $k \in \mathbb{R}$, on définit la fonction f_k par
   $$f_k(x) = \frac{1}{1-x} + ke^{-2x}.$$
   On désigne par $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.
   (a) Déterminer le développement limité d'ordre 3, en $x = 0$ de $f_k(x)$.
   (b) Donner l'équation de la tangente T_k à $\mathcal{C}_k$ en $x = 0$.
   Montrer que toutes les tangentes T_k sont concourantes (avec $k \in \mathbb{R}$) en un point à déterminer.
   (c) Existe-t-il des courbes $\mathcal{C}_k$ qui possèdent un point d'inflexion en $x = 0$? Si oui, les déterminer et tracer l'allure locale de ces courbes et de leur tangente en 0.
   (d) On définit la fonction φ_k par $\varphi_k(x) = \dfrac{f_k(x)}{x}$.
   Montrer qu'il existe une seule valeur de k permettant de prolonger φ_k par continuité en 0 : on appelle ψ cette fonction φ_k. Justifier que la fonction ψ est dérivable en 0, donner la valeur de $\psi'(0)$ et tracer l'allure de la courbe représentative de ψ avec sa tangente au voisinage de 0.

Exercice 2 On considère l'équation différentielle :
$$(E) \qquad |x|\, y'(x) + (x+1)\, y(x) = x^2.$$

1. Calcul préliminaire : déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^2e^x$.
   Indication : vérifier le résultat obtenu en le dérivant (pour information, on trouve des fonctions faisant intervenir une expression de la forme $x \mapsto (x^2+ax+b)e^x$ où a et b sont des constantes).

2. (a) Déterminer les solutions de l'équation (E) sur l'intervalle $I_2 =]0, +\infty[$.
   (b) Montrer que, parmi ces solutions, il y en a une et une seule qui possède une limite finie en 0^+. On note désormais y_2 cette solution unique.
   (c) Déterminer le développement limité d'ordre 2 de $y_2(x)$ en $x = 0^+$ (au voisinage de 0 à droite).
3. (a) Résoudre l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $I_1 =]-\infty, 0[$. On note y_1 les solutions, décrites à l'aide d'un paramètre réel k.
   (b) Déterminer le développement limité d'ordre 2 de $y_1(x)$ en $x = 0^-$ (au voisinage de 0 à gauche).
4. On note f, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} y_1(x) & \text{si } x < 0 \\ \alpha & \text{si } x = 0 \\ y_2(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer qu'il existe un et un seul choix de α pour lequel f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Dans ce cas, pour quelles valeurs de k la fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
   (c) L'équation différentielle (E) possède-t-elle une solution sur l'ensemble $\mathbb{R}$?
   Si oui, tracer l'allure locale, au voisinage de 0, d'une telle solution.

Exercice 3

Partie 1

On pose $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$ pour tout $x \in]0, 1[$.
Montrer que f est une bijection de $]0, 1[$ vers $]0, +\infty[$ (on pourra étudier la fonction f).
On note g sa bijection réciproque. Donner, pour tout $x > 0$, une expression simple de $g(x)$.

Partie 2

On considère l'équation différentielle

$$(H)\ :\ 2x(1-x)y' + y = 0.$$

1. Résoudre[1] (H) sur l'intervalle $]0, 1[$.
2. Résoudre sur $]0, 1[$ l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ 2x(1-x)y' + y = (1-x)\sqrt{\frac{x}{1+x}}.$$

3. Déterminer les solutions y de (E) définies sur $]0, 1[$ et vérifiant $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$.
4. Quelles sont les solutions de (E) définies sur $]0, 1[$ et qui sont à valeurs dans $]0, +\infty[$?

Partie 3

On considère l'équation différentielle **non linéaire**

$$(K)\ :\ xy' + 2y(1-y) = 0.$$

Par définition, les solutions de (K) sur un intervalle I sont les fonctions u dérivables sur I telles que

$$\forall x \in I, \quad x\,u'(x) + 2u(x)\,(1 - u(x)) = 0.$$

1. On cherche donc ici uniquement les fonctions solutions $y\ :]0, 1[\to \mathbb{R}$.

1. Quelles sont les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$ qui sont solutions de (K) ?
2. Dans cette question, on suppose que u est solution de (K) sur $]0,+\infty[$, à valeurs dans $]0,1[$.
   (a) Montrer que u est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.
   On peut en déduire (voir le cours *fonction-limite-continuité*, analogue du *théorème de la limite monotone* pour les suites) que, dans ce cas, la fonction u possède des limites (*finies ou infinies*) aux bords i.e $\lim\limits_{x\to 0^+}(u(x))$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}(u(x))$ existent. De plus, u étant une fonction bornée, à valeurs dans $]0,1[$, on peut alors affirmer que ces limites sont finies avec, en posant $\alpha = \lim\limits_{x\to +\infty}(u(x))$ et $\beta = \lim\limits_{x\to 0^+}(u(x))$:
   $$0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1, \text{ et } u \text{ réalise donc une bijection de }]0,+\infty[\text{ vers }]\alpha,\beta[.$$
   (b) On note v la bijection réciproque de u. Montrer que v est solution de (H) sur $]\alpha,\beta[$.
   (c) En déduire qu'il existe un réel $c>0$ tel que :
   $$\forall x>0,\quad u(x) = \frac{1}{1+(\frac{x}{c})^2}.$$
3. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (K) sur $]0,+\infty[$ et qui sont à valeurs dans $]0,1[$.
   (a) Décrire $\mathcal{S}$.
   (b) Soit x_0 un réel strictement positif (fixé). Soit $y_0 \in]0,1[$ (fixé lui aussi).
   Montrer qu'il existe une, et une seule, solution u_0 de $\mathcal{S}$ qui vérifie $u_0(x_0) = y_0$.
   (c) Trouver l'ensemble des points $m(x,y)$ du plan qui vérifient $u_0''(x) = 0$, où u_0 est l'unique élément de $\mathcal{S}$ qui vérifie $u_0(x) = y$.
   Autrement dit, déterminer l'ensemble des points du plan en lesquels la dérivée seconde des éléments de $\mathcal{S}$ s'annule.

Exercice 4 Pour $a \in]0,+\infty[$, on définit le problème $\mathcal{P}_a$ suivant :

$$\mathcal{P}_a : « \boxed{f :]0,+\infty[\to]0,+\infty[,\ f \text{ est } \textbf{dérivable} \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et pour tout } x \in]0,+\infty[,\ f'\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{x}{f(x)}} ».$$

1. Soit f, une solution de $\mathcal{P}_a$.
   (a) On pose, pour tout $x \in]0,+\infty[$: $g(x) = f(x)f\left(\frac{a}{x}\right)$. Montrer que g est une fonction constante.
   (b) En déduire qu'il existe un réel $b>0$ tel que f vérifie l'équation différentielle :
   $$(E) : «bxy'(x) - ay(x) = 0».$$
   (c) Résoudre l'équation (E).
2. Déterminer les solutions du problème $\mathcal{P}_a$.