La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 COURS et APPLICATIONS DU COURS - Questions largement indépendantes

1. Compléter (pas de preuve exigée) **sur la feuille jointe à ce sujet (ne pas oublier de la glisser dans votre copie)** :
   (a) $\forall x \in \ldots\ldots$, $\text{Arctan}'(x) = \ldots\ldots.$
   (b) $\forall x \in \ldots\ldots$, $\text{Arccos}'(x) = \ldots\ldots.$
   (c) $\forall x \in \ldots\ldots$, $\text{Arcsin}'(x) = \ldots\ldots.$
   (d) $(\text{Arcsin}(\sin(t)) = t) \Leftrightarrow (t \in \ldots\ldots)$
   (e) $(\text{Arccos}(\cos(t)) = t) \Leftrightarrow (t \in \ldots\ldots)$
   (f) $(\text{Arctan}(\tan(t)) = t) \Leftrightarrow (t \in \ldots\ldots)$
   (g) $\forall x \in \ldots\ldots$, $\text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x) = \ldots\ldots.$
   (h) Sous réserve d'existence : exprimer en fonction de $\tan(a)$ et de $\tan(b)$,
   $$\tan(a+b) = \ldots\ldots \quad \text{et} \quad \tan(a-b) = \ldots\ldots \quad \text{et} \quad \tan(2a) = \ldots\ldots$$
   (i) $\forall x \in \ldots$, $\sin(\text{Arccos}(x)) = \cos(\text{Arcsin}(x)) = \ldots$
   (j) Donner les valeurs exactes de :
   $$\text{Arctan}(-1) = \ldots\ldots, \quad \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \ldots\ldots, \quad \text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \ldots\ldots, \quad \text{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \ldots\ldots$$
2. On pose $A = \text{Arccos}\left(\frac{4}{5}\right)$ et $B = 2\text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$.
   Calculer $\cos(A)$ et $\cos(B)$, puis comparer A et B.
3. *Dans cette question de vérification des techniques de calculs, il n'est pas demandé de justifier l'existence des intégrales.*
   (a) Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_3^4 \frac{1}{x^2 - 7x + 10}\mathrm{d}x$.
   (b) Calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2 + 2x + 5}\mathrm{d}x$.
   (c) Calculer l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{x}$.

Exercice 2 On définit la famille de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbb{R}}$ par, pour tout $k \in \mathbb{R}$,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \ln(1 + x^2) + k\,\text{Arctan}(x).$$
On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal.
Les trois questions sont largement indépendantes.

1. Déterminer le nombre de courbes $\mathcal{C}_k$ (avec $k \in \mathbb{R}$) qui passent par un point M_0 du plan de coordonnées (x_0, y_0).
2. (a) Pour $k \in \mathbb{R}$, donner l'équation de la tangente T_k à $\mathcal{C}_k$ au point d'abscisse 1.
   (b) Montrer que toutes les droites T_k sont concourantes en un point que l'on déterminera.
3. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on définit l'intégrale $I(k) = \displaystyle\int_0^1 f_k(t)\mathrm{d}t$.
   Existe-t-il $k \in \mathbb{R}$ tel que $I(k) = \dfrac{\pi}{2}$? Si oui, donner la (les) valeur(s) exacte(s) de(s) k solution(s).

Exercice 3 Soit la fonction f définie par $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$.

1. Calculs préliminaires : établir le tableau de variation (limites aux bords comprises) et de signe de la fonction $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.
2. (a) Déterminer D_f, le domaine de définition de f.
   Justifier que f est dérivable sur D_f et calculer $f'(x)$ si $x \in D_f$.
   (b) En déduire une expression simple de $\arctan\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ lorsque $x \in]-1, +\infty[$.
   (c) Recopier et compléter (aucune preuve n'est demandée) :
   $$\text{pour tout } t \in \ldots, \quad \arctan(t) + \arctan\left(\tfrac{1}{t}\right) = \ldots .$$
   En déduire une expression de $f(x)$ pour les $x \in D_f$ vérifiant $x < -1$.
3. On désire, dans cette question, retrouver une expression simplifiée de $f(x)$, pour tout $x \in D_f$, à l'aide d'un changement de variable.
   (a) Justifier que, pour tout $x \in D_f$, il existe un unique $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $x = \tan(\theta)$.
   (b) Vérifier que, dans ce cas, $f(x) = \arctan\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right)\right)$.
   (c) Retrouver alors une expression de $f(x)$ pour chaque $x \in D_f$.
4. On définit la fonction H par $H(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\arctan(t)}{1+t}\mathrm{d}t$.
   (a) Justifier que la fonction H est définie et dérivable sur $]-1, +\infty[$.
   Quelle est sa dérivée ?
   (b) Justifier que la fonction $\Delta : x \mapsto \Delta(x) = H\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) - H(x)$ est définie et dérivable sur$]-1, +\infty[$.
   (c) Montrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que
   $$\text{pour tout } x > -1, \quad \Delta(x) = C - \frac{\pi}{4}\ln(1+x).$$
   (d) Calculer $\Delta\left(\sqrt{2}-1\right)$, et en déduire la valeur de C.
   (e) Que valent les intégrales $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(t)}{1+t}\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$?

Exercice 4 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$.

1. (a) Donner une primitive de la fonction $\varphi : [x \mapsto \varphi(x) = \sqrt{1-x}]$.
   (b) En déduire la valeur de u_0.
   (c) Calculer u_1 à l'aide d'une intégration par parties (on intégrera la fonction φ).
2. (a) Etablir, pour tout $n \geqslant 1$ la relation : $u_n = \dfrac{2n}{3}(u_{n-1} - u_n)$.
   (b) En déduire, pour tout entier $n \geqslant 0$, une expression de u_{n+1} à l'aide de u_n.
   (c) Préciser la valeur de u_2.
3. (a) On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\alpha_n = \dfrac{(2n+3)! \times u_n}{n! \times (n+1)!}$.
   Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique.

(b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de α_n puis celle de u_n.

(c) On rappelle la `formule de Stirling`, donnant un équivalent de la factorielle de n lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}.$$

Donner un équivalent de $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ puis en déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$, puis sa limite.

4. A l'aide du changement de variable $x = 1 - t^2$, prouver, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que l'on a aussi :

$$u_n = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+3}.$$

Retrouver la valeur de u_2 à l'aide de cette formule.

5. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x$.

(a) Préciser les valeurs de W_0 et W_1.

(b) A l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

(c) A l'aide du changement de variables $x = \sin^2(t)$, établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 2\left(W_{2n+1} - W_{2n+3}\right).$$

Puis exprimer u_n à l'aide de W_{2n+1} uniquement.
Donner alors une expression de W_{2n+1} en fonction de n.

(d) Montrer que la suite $((n+1)W_n W_{n+1})_{n\geqslant 0}$ est constante.
En déduire W_{2n} en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

6. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Simplifier S_n puis déterminer la valeur de sa limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (S_n)$.

7. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, la somme $R_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k}$.

Simplifier R_n puis déterminer la valeur de sa limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (R_n)$.