La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 COURS et APPLICATIONS DU COURS - Questions largement indépendantes

1. Sous réserve d'existence : exprimer en fonction de $\tan(a)$ et de $\tan(b)$,
$$\tan(a+b) = \dots\dots \quad \text{et} \quad \tan(a-b) = \dots\dots \quad \text{et} \quad \tan(2a) = \dots\dots$$
2. Si q est un nombre complexe et n un entier naturel, simplifier les sommes suivantes :
   (a) $1 - q + q^2 - \cdots + (-1)^n q^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^k = \dots ?$
   (b) $1 + 2q^2 + 4q^4 + 8q^6 + \cdots + 2^n q^{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k q^{2k} = \dots ?$
3. Rappeler la définition **et** l'expression des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité (où $n \geqslant 1$).
4. Si θ est un réel, factoriser :
$$1 + e^{i\theta} = \dots \qquad \text{et} \qquad 1 - e^{i\theta} = \dots$$
puis factoriser
$$1 + \cos(\theta) = \dots \qquad \text{et} \qquad 1 - \cos(\theta) = \dots$$
5. (a) Déterminer les racines carrées (i.e racines deuxièmes) de $\omega = 3 + 4i$.
   (b) Déterminer les racines du polynôme $Q(z) = z^2 + (-4+3i)z + 1 - 7i$.
   (c) On considère le polynôme P défini par
$$P(z) = z^3 + (-6+3i)z^2 + (9-13i)z - 2 + 14i.$$
   Prouver que ce polynôme possède **une et une seule** racine réelle r.
   (d) En déduire les valeurs des trois racines de ce polynôme P.
6. (a) Pour tout réel $\theta \in \mathbb{R}$, linéariser $\sin^3(\theta)$.
   On rappelle que cela signifie trouver une expression de $\sin^3(\theta)$ en fonction de $\sin(k\theta)$ et éventuellement $\cos(k\theta)$ avec $k \in \mathbb{N}$. Vérifier le résultat obtenu en l'évaluant avec $\theta = 0$ puis $\theta = \frac{\pi}{2}$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit
$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^3(3^k x)}{3^k}.$$
   Simplifier l'expression $g_n(x)$.
   (c) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(g_n(x))_{n \geqslant 1}$ converge vers une limite que l'on précisera.

Exercice 2 Dans cet exercice, on cherche à déterminer l'unique solution réelle de l'équation
$$(E) \text{ « } x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0 \text{ ».}$$
On définit pour cela les fonctions f et g par
$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2x^2+3}{x^2+1}.$$

1. Montrer que (E) est équivalente à « $g(x) = x$ ».
2. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   En déduire que (E) admet une unique solution α et justifier $2 < \alpha < 3$.
3. (a) Déterminer des constantes a et b telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = a + \dfrac{b}{x^2+1}$.
   (b) Déterminer $g'(x)$ et $g''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   (c) En déduire les tableaux de variations de g' et de g sur $\mathbb{R}$ (avec limites aux bords).

   (d) Montrer que, pour tout $x \in [2,3]$, on a : $|g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{6}$.

4. On étudie ici la suite u définie par $u_0 = 2$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n^2+3}{u_n^2+1}.$$
   (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [2,3]$.
   (b) Question de cours : donner un énoncé précis de *l'inégalité des accroissements finis.*
   (c) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{6}|u_n - \alpha|$.
   (d) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{6^n}$.
   (e) Indiquer une méthode permettant d'obtenir une valeur approchée de α à 10^{-6} près.
   On pourra se servir de la suite des 10 premières puissances de 6 :
   1, 6, 36, 216, 1296, 7776, 46656, 279936, 1679616, 10077696.

Exercice 3 On considère la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) \end{array} \right.$.

1. Soit ω, un nombre complexe. Préciser, selon la valeur de ω, le **nombre de solutions** dans $\mathbb{C}^*$ de l'équation d'inconnue z suivante :
$$« \ z^2 - 2\omega z + 1 = 0 \ ».$$
2. La fonction $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle bijective ?
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $f(z)$ est un réel.
   Que représente cet ensemble $\mathcal{E}$ pour f ?
4. Soit un complexe z non nul ($z \in \mathbb{C}^*$). Prouver l'équivalence :
$$(f(z) \text{ est un imaginaire pur}) \Leftrightarrow (z \text{ est un imaginaire pur}).$$
   En déduire l'ensemble $f^{-1}(i\mathbb{R})$ (où «$i\mathbb{R}$» est une notation qui désigne l'ensemble des nombres imaginaires purs i.e l'ensemble des nombres qui s'écrivent ir avec $r \in \mathbb{R}$).
5. On définit la famille des polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
$$P_0(X) = 1 \quad \text{et} \quad P_1(X) = X \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \geqslant 0,\ P_{n+2}(X) = 2XP_{n+1}(X) - P_n(X).$$
   (a) Déterminer les polynômes $P_2(X)$, $P_3(X)$ et $P_4(X)$.
   (b) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :
$$\forall z \in \mathbb{C}^*,\ f(z^n) = P_n(f(z)).$$
   (c) En déduire :
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ pour tout } \theta \in \mathbb{R},\ P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$
   (d) Une application
      i. Résoudre l'équation, d'inconnue θ : $\cos(4\theta) = 0$.
      ii. Déterminer les racines du polynôme P_4.
      iii. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et soient $z_0, \cdots, z_{n-1}$ des complexes non nuls.

Pour $k \in [\![0 ; n-1]\!]$, on pose $a_k = \dfrac{z_k}{|z_k|}$ et on suppose que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k = 0$.

On définit alors la fonction f sur $\mathbb{C}$, par $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \overline{a_k}\,(z - z_k)$.

1. Pour $k \in [\![0 ; n-1]\!]$, quel est le module de a_k ?
2. Simplifier $f(0)$.
3. Pour $(t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2$, simplifier $f(t_1) - f(t_2)$. En déduire que f est une fonction constante sur $\mathbb{C}$.
4. En déduire :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} |z_k| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |z - z_k| \qquad (*).$$
5. <u>Une première application</u>
Soit $M_0M_1M_2M_3$ un carré dont la longueur des côtés vaut 1.
On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé tel que les affixes de A, B et C soit, respectivement, $z_0 = \dfrac{1+i}{2}$, $z_1 = \dfrac{-1+i}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-1-i}{2}$.
   (a) Quelle est l'affixe z_3 du point D ?
   (b) Justifier que l'on peut appliquer $(*)$.
   (c) Si M est un point du plan d'affixe z, quel est le minimum de $MM_0 + MM_1 + MM_2 + MM_3$ (cette valeur est la somme des distances de M aux quatre sommets du carré).
6. <u>Une seconde application</u>
Dans cette partie, on suppose que $n = 2$ et on pose
$$z_0 = -\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\,(1+i)\,, \quad z_1 = 1 + z_0 \quad \text{et} \quad z_2 = i + z_0$$
   (a) Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer :
   $$|1+z|^2 = 1 + |z^2| + 2\,\mathrm{Re}\,(z) \qquad \text{et} \qquad |i+z|^2 = 1 + |z^2| + 2\,\mathrm{Im}\,(z).$$
   (b) Donner la forme exponentielle de $-1-i$, puis celle de z_0.
   (c) Calculer $|z_1|$ et $|z_2|$ et simplifier $a_1 + a_2$.
   Que vaut $a_0 + a_1 + a_2$?
   (d) On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct et on note M_0, M_1 et M_2 les points d'affixe z_0, z_1 et z_2.
      i. Montrer que le triangle de sommets M_0, M_1 et M_2 est rectangle en M_0 et isocèle.
      ii. Si M a pour affixe z, quel est le minimum de $MM_0 + MM_1 + MM_2$?