La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1

QUESTIONS DE COURS (**aucune preuve n'est demandée**) - APPLICATIONS DU COURS

1. Si Q est un nombre complexe et N un entier naturel, simplifier les sommes suivantes :

   (a) $1+Q+Q^2+\cdots+Q^N=\displaystyle\sum_{k=0}^{N} Q^k=\ldots?$

   (b) $1-Q+Q^2-\cdots+(-1)^N Q^N=\displaystyle\sum_{k=0}^{N}(-1)^k Q^k=\ldots?$

2. Recopier et compléter :

$$\sum_{k=0}^{n} k=\ldots \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2=\ldots.$$

3. La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $F_0=0$, $F_1=1$ et, pour tout $n\geqslant 2$, $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$.
   Montrer : pour tout $n\geqslant 5$, $F_n\geqslant n$.

4. On définit la suite des nombres d'Euler $(e_n)_{n\geqslant 0}$ par

$$e_0=e_1=1 \quad \text{et pour tout entier } n\geqslant 1, \quad e_{n+1}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e_k e_{n-k}.$$

   (a) Calculer les valeurs, sous forme simplifiée, de e_2 et e_3.

   (b) Prouver que pour tout entier $n\geqslant 0$, on a :

$$e_n\geqslant \frac{n!}{2^n}.$$

5. On définit, pour tout entier $n\geqslant 1$, $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k3^k$, somme qu'on désire simplifier (i.e l'exprimer en fonction de n). On propose ici trois méthodes différentes pour atteindre cet objectif.

   (a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\left(n-\dfrac{3}{2}\right)3^n$: simplifier $u_{n+1}-u_n$.
   En déduire la valeur explicite de S_n.

   (b) <u>Une autre méthode</u> : déterminer la valeur de S_n en remarquant $k=\displaystyle\sum_{i=1}^{k}1$.

   (c) <u>Et une dernière méthode</u> : pour tout $x\in]1,+\infty[$, on pose $P(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x^k=x+x^2+\cdots+x^n$.

   - Simplifier $P(x)$ pour tout $x\in]1,+\infty[$.
   - Calculer le nombre dérivé $P'(x)$ de deux façons différentes pour $x>1$.
   - En déduire une expression explicite de S_n.

Exercice 2 Pour $(n,p)\in\mathbb{N}^2$, on note

$$S_p(n)=\sum_{k=0}^{n}k^p=0^p+1^p+2^p+\cdots+n^p.$$

On prend, bien entendu, la convention $0^0=1$.

1. Rappeler la formule du binôme de Newton.

2. En voyant la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{p+1}\binom{p+1}{k}S_k(n)$ comme une somme double, prouver directement l'égalité, pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}^2$,
$$\sum_{k=0}^{p+1}\binom{p+1}{k}S_k(n)=S_{p+1}(n+1).$$
3. En déduire :
$$\sum_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k}S_k(n)=(n+1)^{p+1}.$$
4. Que vaut $S_0(n)$? Puis montrer que, avec successivement $p=1$, $p=2$, $p=3$, la formule précédente permet de retrouver <u>directement</u> les valeurs des sommes :
$$\sum_{k=0}^{n}k \quad \text{puis} \quad \sum_{k=0}^{n}k^2 \quad \text{puis} \quad \sum_{k=0}^{n}k^3.$$

Exercice 3 Soit m un paramètre réel et f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ par
$$f_m\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y-m^2z\\x+my+m^2z\\-x+y-m(m+2)z\end{pmatrix}.$$
On s'intéresse à l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité et à l'ensemble image de f_m. Ainsi si l'on demande ce que l'on peut déduire d'un résultat et/ou calcul pour f_m, on attend une réponse relative à ces questions.

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $m=-1$.
   (a) Calculer $f_{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $f_{-1}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$, que peut-on en déduire pour f_{-1} ?
   (b) Résoudre le système $f_{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$, que peut-on en déduire pour f_{-1} ?
   (c) A quelle condition sur $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, le système $f_{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ admet-il au moins une solution ? Que peut-on en déduire pour f_{-1} ?
2. On se place dans le cas général où $m\in\mathbb{R}$ est quelconque.
   (a) Pour $m\notin\{-1,0\}$, montrer que pour tout $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ l'équation $f_m\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ admet toujours une unique solution. Que peut-on en déduire pour f_m ?
   (b) Pour $m=-2$: déterminer $f_{-2}^{-1}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ en fonction de $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.
   (c) Que dire de f_0 ?

Exercice 4 Dans cet exercice, pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note la somme double
$$S_n=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{1}{i+j}, \quad \text{et on pose} \quad H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

1. Pour $(i,j) \in [[1;n]]^2$, justifier : $\dfrac{1}{2n} \leqslant \dfrac{1}{i+j}$.
   En déduire : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n}{2} \leqslant S_n$.

2. Par le même type de méthode, prouver : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \leqslant \dfrac{n^2}{2}$.

Le but de cet exercice est d'améliorer significativement cette majoration, sans calculer exactement S_n.

3. (a) Prouver :
   $$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad \ln(1+x) \leqslant x.$$
   (b) En utilisant la question précédente, montrer, pour tout entier k :
   $$\text{si } k \geqslant 2, \quad \frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1).$$
   (c) En déduire que, pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $q > p \geqslant 1$, on a :
   $$\sum_{k=p+1}^{q} \frac{1}{k} \leqslant \ln(q) - \ln(p),$$
   puis
   $$H_q - H_p \leqslant \ln\left(\frac{q}{p}\right).$$

4. Soit $n \geqslant 1$. En transformant S_n en une somme de la forme $\displaystyle\sum_{i=?}^{?} \sum_{k=?}^{?} \frac{1}{k}$, montrer
   $$S_n = \sum_{j=n+1}^{2n} H_j - \sum_{i=1}^{n} H_i.$$

5. Montrer :
   $$\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)\left(H_{n+1} - 1\right).$$
   Indication : on pourra, au choix, faire une récurrence OU procéder à une interversion de sommes dans $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} H_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{k}$.

6. En déduire :
   $$\begin{aligned} S_n &= (2n+1)\left(H_{2n+1} - 1\right) - 2\,(n+1)\left(H_{n+1} - 1\right) \\ &= (2n+1)\,H_{2n+1} - 2\,(n+1)\,H_{n+1} + 1. \end{aligned}$$
   Puis, après avoir justifié l'égalité $(n+1)\,H_{n+1} = (n+1)\,H_n + 1$, montrer :
   $$S_{n+1} = (2n+3)\,H_{2n+2} - 2\,(n+2)\,H_{n+1}.$$

7. Montrer :
   $$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2\,(n+1)} + 2\left(H_{2n+1} - H_{n+1}\right).$$

8. Enfin, prouver, pour tout $n \geqslant 1$,
   $$S_n \leqslant n \ln(4).$$