La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1

I : quelques résultats préliminaires

1. On rappelle la définition de la fonction tangente hyperbolique :
$$\mathrm{th} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} \end{array} \right. .$$
Déterminer sa dérivée th' : on donnera deux expressions de cette dérivée, une uniquement en fonction de th, une autre uniquement en fonction de ch.
2. (a) Rappeler, sans preuve, les développements limités d'ordre 3 en $x = 0$ (notés $\mathrm{DL}_3(0)$) des quantités suivantes :
$$\sin(x) \quad \text{et} \quad \cos(x) \quad \text{et} \quad \tan(x) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+x} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}(x).$$
(b) Calculer le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction th.

Pour tout ce problème, on définit les fonctions suivantes, où I désigne l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$:
$$f : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right) \end{array} \right.$$
et
$$h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & h(x) = \arcsin(\mathrm{th}(x)) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad K : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & K(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)} + i\,\mathrm{th}(x) \end{array} \right. .$$
On souhaite étudier des propriétés de la suite des nombres d'Euler, notée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

II : définition des nombres d'Euler.

1. Justifier que f est de classe C^∞ sur l'intervalle I.
2. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n = f^{(n)}(0)$.
Calculer e_0, e_1 et e_2.

III : autour de la fonction f.

1. Résoudre, sur l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$, l'équation différentielle suivante
$$(E) \text{ « } y'(x) = \tan(x)y(x) + 1 \text{ ».}$$
2. Prouver qu'on a, pour tout $x \in I$,
$$f(x) = \frac{1}{\cos(x)} + \tan(x).$$
Indication : on pourra poser $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.
3. Montrer qu'il existe une et une seule solution y de l'équation différentielle (E) vérifiant $y(0) = 1$.
Qui est cette solution unique ?

IV : étude d'une suite de polynômes.

On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$P_0 = X \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} = (1+X^2)P_n'.$$
Autrement dit, $P_0(X) = X$ et $P_{n+1}(X) = (1+X^2){P_n}'(X)$.

1. Calculer les polynômes P_1, P_2 et P_3.
2. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est un polynôme à **coefficients entiers naturels** et de degré $n+1$. On précisera également la valeur du coefficient dominant α_n du polynôme P_n.
3. Montrer que, si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $|z| = 1$ (i.e $z \in \mathbb{U}$), alors :
$$|P_n(z)| \leqslant P_n(1) \quad \text{(pour tout } n \in \mathbb{N}\text{)}.$$
4. Montrer : pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in I$,
$$P_n(\tan x) = \tan^{(n)}(x).$$
5. En déduire : pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$e_n = \frac{P_n(1)}{2^n}.$$
6. Une première minoration des nombres d'Euler : justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{n!}{2^n} \leqslant e_n.$$
7. Question complémentaire : prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre complexe i est une racine **simple** (i.e de multiplicité un) du polynôme P_n.

V : étude des fonctions h et K.

1. (a) Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$. Exprimer simplement sa dérivée à l'aide de la fonction ch.
   (b) Dresser le tableau de variations de h, limites aux bords comprises.
   (c) Soit $x \in \mathbb{R}$: exprimer simplement $\cos(h(x))$ en fonction de $\mathrm{ch}(x)$.
2. (a) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^{ih(x)} = K(x)$.
   (b) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad K^{(n)}(x) = \frac{i^n}{2^n} P_n\left(e^{ih(x)}\right).$$

VI : une autre minoration des nombres d'Euler.

1. Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\left|P_n\left(e^{ih(x)}\right)\right| \leqslant P_n(1).$$
2. Puis, en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$e_n \geqslant \left|\left(\frac{1}{\mathrm{ch}}\right)^{(n)}(x)\right|.$$

VII : une relation de récurrence et une majoration des nombres d'Euler.

1. Montrer que la fonction f est solution de l'équation différentielle (non linéaire) $\begin{cases} y' &= \frac{1}{2}(y^2+1) \\ y(0) &= 1 \end{cases}$.
2. Rappeler l'énoncé du théorème de Leibniz (hypothèses et formule comprises).
3. Montrer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:
$$e_{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e_k e_{n-k}.$$
4. (a) Calculer alors les valeurs de e_3, e_4, e_5.
   (b) Donner, en utilisant les résultats précédents, le $\mathrm{DL}_5(0)$ de la fonction tan.
5. Prouver que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$e_n \leqslant \sqrt{2} \times \frac{n!}{\sqrt{2}^{\,n}}.$$

Exercice 2 Soit $a \in \mathbb{R}$, on définit la matrice

$$M(a) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a-1 \\ 1 & 2 & a-2 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

On note $M_0 = M(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de matrice M_0 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Dans tout le problème I_3 désignera la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

Première partie : le cas $a = 0$.

1. On définit $p(\lambda) = \det(M_0 - \lambda I_3)$
   (a) Calculer $p(\lambda)$ et déterminer $Sp(M_0)$, l'ensemble des racines de $p(\lambda)$.
   (b) Justifier que
   $$(\lambda \in Sp(M_0)) \Longleftrightarrow (f - \lambda \text{Id est non injective}).$$
   (c) Montrer qu'il existe deux réels $\lambda_1 < \lambda_2$ tels que $f - \lambda\text{Id}$ soit non injective.
   Montrer que $\ker(f - \lambda_1\text{Id})$ et $\ker(f - \lambda_2\text{Id})$ sont des droites vectorielles : en préciser, pour chacune d'elles, une base sous la forme $\overrightarrow{b_1} = (*, 1, *)$ et $\overrightarrow{b_2} = (*, 1, *)$.
   (d) Montrer qu'il existe une infinité de vecteurs $\overrightarrow{b_3}$ tels que $f\left(\overrightarrow{b_3}\right) = \overrightarrow{b_3} + \overrightarrow{b_1}$: donner une description paramétrique de l'ensemble de ces vecteurs.
   (e) Déterminer l'unique solution de la forme $\overrightarrow{b_3} = (*, 1, *)$.
2. On note la famille $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}\right)$.
   (a) Justifier que $\mathcal{B}$ est une base et préciser la matrice, notée T, de f dans cette base.
   (b) En décomposant $T = D + N$ où D est une matrice diagonale, calculer T^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. On appelle P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$.
   (a) Parmi les cinq matrices suivantes, laquelle est P :
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ?$$
   (b) Cette matrice est-elle inversible ? Si oui, calculer P^{-1}. Vérification ?
   (c) Quelle relation existe-t-il entre M_0^n et T^n ? En déduire une expression de M_0^n.

Seconde Partie : dans cette partie, on considère le cas général où $a \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

1. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{n+1} = (1 + a)\,\alpha_n + b.$$
   Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression du terme α_n en fonction de a, b, n et α_0.
2. On se propose de montrer qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M(a)^n = \begin{pmatrix} 1 + u_n & 0 & -1 + v_n \\ u_n & 2^n & -2^n + v_n \\ u_n & 0 & v_n \end{pmatrix}.$$

(a) Quelles sont alors les valeurs de u_0, v_0, u_1 et v_1 ?

(b) Montrer l'existence des deux suites et établir [1] que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = (1+a)\,u_n + 1 \\ v_{n+1} = (1+a)\,v_n - 1 \end{cases}.$$

(c) En déduire u_n et v_n en fonction de n.

3. Désormais, on pose $a = 1$.

   (a) Donner l'expression de $M(1)^n$.

   (b) On définit $Q_n = \dfrac{1}{2^n} M(1)^n$ et on dit que la suite de matrices $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si TOUS les coefficients de Q_n définissent des suites convergentes, et $\lim\limits_{n\to+\infty} (Q_n)$ est alors, naturellement, la «matrice des limites» .
   Montrer que la suite de matrices $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice Q que l'on explicitera.

   (c) Montrer que l'endomorphisme canoniquement associé à Q est une projection vectorielle sur le sous-espace vect $\left(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\right)$. Préciser la direction de cette projection.

Exercice 3 Soit un entier naturel $n \geqslant 2$, et $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ sa décomposition en produit de nombres premiers. On définit $\Omega = \{1, 2, \dots, n\} = [[1, n]]$, muni de la probabilité uniforme.
Pour tout i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant r$, on pose $A_i = \{k \in \Omega \text{ tel que } p_i \text{ divise } k\}$.

1. Si d est un diviseur de n, on note M_d l'ensemble des multiples de d dans Ω. Calculer $\mathbb{P}(M_d)$.
2. Pour chaque $i \in [\![1 \,;\, r]\!]$, calculer $\mathbb{P}(A_i)$.
3. (a) Montrer que, pour $i \neq j$, les événements A_i et A_j sont indépendants.

   (b) Justifier que les événements $A_1, A_2, \dots, A_r$ sont (mutuellement) indépendants.
4. Calculer la probabilité de l'événement $B = \{k \in \Omega \text{ tel que aucun } p_i \text{ ne divise } k\}$.
5. En déduire la valeur de $\varphi(n) = |B|$ (où $|B|$ désigne le cardinal de B).
   Ainsi, $\varphi(n)$ représente le nombre d'entiers de $[[1, n]]$ qui sont premiers avec n, l'application $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ porte le nom d'**indicatrice d'Euler**.
6. Exemple : pour $n = 12$, expliciter B et vérifier le résultat obtenu.

1. Il est fortement conseillé d'utiliser $M(a)^{n+1} = M(a) \times M(a)^n$ plutôt que $M(a)^{n+1} = M(a)^n \times M(a)$.