La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront <u>encadrés</u> ou soulignés.

Exercice 1 Pour $n \geqslant 1$, on définit :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+n}, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n} \quad \text{et} \quad w_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln\left(1+e^k\right)}{k+n}.$$

1. Montrer que les suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent et préciser leur limite.
2. Montrer que pour $x \geqslant 0$: $x \leqslant \ln(1+e^x) \leqslant x+1$.
3. En déduire un équivalent de w_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 2

Première partie : étude d'un exemple

On pose $E = \mathbb{R}^3$ et on définit les endomorphismes de E, f_0 et φ, par :

- $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (x,y,z) & \longmapsto & \varphi(x,y,z) = (x+y+z, x+y+z, x+y+z) \end{array} \right.$
- $f_0 : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (x,y,z) & \longmapsto & f_0(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y) \end{array} \right.$.

1. Déterminer les noyau et image de φ : on donnera, une base simple de chacun d'entre eux.
   φ est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$: $\varphi^k = \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{k \text{ fois}} = 3^{k-1}\varphi$.
3. Vérifier que $f_0 = \varphi - \mathrm{I}$, où $\mathrm{I} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$, une expression de $f_0^n = \underbrace{f_0 \circ \cdots \circ f_0}_{n \text{ fois}}$ en fonction de φ et de I.
4. Montrer $f_0^2 - f_0 = \lambda \mathrm{I}$ où λ est un réel que l'on déterminera
5. Montrer que f_0 est bijective et déterminer $f_0^{-1}(x,y,z)$ pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

Deuxième partie : étude du cas général

E désigne ici **un** $\mathbb{R}$-espace vectoriel non trivial (i.e non réduit à son vecteur nul), mais **quelconque** (pas forcément $\mathbb{R}^3$), et f **un** endomorphisme de E ($f \in \mathcal{L}(E)$) vérifiant l'égalité :

$$f^2 - f - 2\mathrm{I} = 0.$$

où l'on a posé $\mathrm{I} = \mathrm{Id}_E$, application identité de E (<u>rappel</u> : ici, 0 représente $0_{\mathcal{L}(E)}$).

1. (a) Montrer que f est un automorphisme de E et exhiber f^{-1}.
   (b) On note g et h les éléments de $\mathcal{L}(E)$ définie par $g = f - 2\mathrm{I}$ et $h = f + \mathrm{I}$.
   Déterminer $g \circ h$ et $h \circ g$.
   (c) En déduire[1] deux inclusions, que l'on prouvera, liant chacune deux ensembles parmi les quatre suivants : $\mathrm{Im}(g)$, $\mathrm{Im}(h)$, $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Ker}(h)$.
   (d) Montrer que I peut s'écrire comme combinaison linéaire de g et h.
   En déduire que $E = \mathrm{Im}(g) + \mathrm{Im(h)}$.

1. On demande ici d'écrire ces deux inclusions et d'en démontrer **une**.

(e) On pose $G = \mathrm{Ker}(g)$ et $H = \mathrm{Ker}(h)$.
Prouver [2] que G et H sont des sous-espaces supplémentaires de E.

2. On note p le projecteur sur G parallèlement à H, et q le projecteur sur H parallèlement à G. Faire un schéma illustrant cette situation et faisant apparaître les espaces G, H, un vecteur $\vec{x}$ quelconque, $p(\vec{x})$ et $q(\vec{x})$.
   (a) Montrer qu'on a $f = 2p - q$.
   (b) Que valent $p \circ q$ et $q \circ p$? Démontrer rapidement ces résultats.
   (c) Déduire des résultats précédents l'expression de f^n en fonction uniquement de p et q (et de $n \geqslant 1$). Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, $f^n \in \mathrm{vect}(p, q)$.
   (d) Vérifier que p et q sont des combinaisons linéaires de f et de $\mathrm{I} = \mathrm{Id}_E$.
   (e) L'expression de f^n obtenue à la question **(2c)** est-elle encore valable si $n = -1$?

Troisième partie : retour au cas particulier

On reprend l'application f_0 donnée dans la première partie :

$$f_0 : \left| \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & E \\ (x, y, z) & \longmapsto & f_0(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y) \end{array} \right.$$

1. Peut-on appliquer les résultats de la deuxième partie à f_0 (on attend une justification) ?
2. Montrer qu'il existe deux projecteurs p et q de $E = \mathbb{R}^3$, que l'on explicitera, et des constantes réelles a et b vérifiant : $\forall n \geqslant 1$, $f_0^n = a^n p + b^n q$.
3. Trouver, à l'aide de la deuxième partie, l'expression analytique de f_0^n. Ce résultat est-il cohérent avec le résultat trouvé dans la première partie ?

Quatrième partie : un autre cas particulier

On considère cette fois $E = \mathbb{R}_2[X]$ et

$$f : \left| \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & E \\ P(X) & \longmapsto & P(1)\ (X^2 + X + 1) - P(X) \end{array} \right.$$

1. Justifier que f est bien un endomorphisme de E.
2. Calculer $f^2(P(X))$ où $P(X) \in E$. Peut-on appliquer les résultats de la deuxième partie ?
3. Soit $Q(X) = X^2 - 3X + 5$: calculer en fonction de $n \in \mathbb{N}$, $f^n(Q(X))$.

Exercice 3

Partie I : étude du cas général

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $3n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$), et f, un endomorphisme de E de rang $2n$.

1. (a) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$, le noyau de l'application f.

2. On n'oubliera pas que $G = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{I})$ et $H = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{I})$, donc $\vec{x} \in G$ équivaut à $f(\vec{x}) =$..., et $\vec{x} \in H$ à $f(\vec{x}) =$...

(b) On note g la restriction de f à $\mathrm{Im}(f)$, image de l'application f.
Ainsi $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Im}(f) & \longrightarrow & E \\ \vec{x} & \longmapsto & g(\vec{x}) := f(\vec{x}) \end{array} \right.$. Justifier que $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f^2)$.
Ecrire $\mathrm{Ker}(g)$ comme intersection de deux sous-espaces de E.

(c) En déduire que le rang de f^2 est supérieur ou égal à n, i.e $\mathrm{rg}(f^2) \geqslant n$.

On suppose désormais que, de plus, $f^3 = 0$ (donc f est nilpotente).

2. (a) Déterminer la valeur de $\mathrm{rg}(f^2)$. En déduire l'égalité $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$.
   (b) Soit S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f^2)$ dans E : justifier que S est dimension n.
3. On suppose que $(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_n)$ est une base de S.
   (a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_n, f(\vec{s}_1), f(\vec{s}_2), \dots, f(\vec{s}_n), f^2(\vec{s}_1), f^2(\vec{s}_2), \dots, f^2(\vec{s}_n))$ est une base de E.
   (b) Les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f^2)$ sont-ils supplémentaires dans E ?
   (c) Même question pour $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$?

Partie II : un premier exemple

Dans cette question, on pose $E = \mathbb{R}_5[X]$ et, pour $P \in E$, $f(P) = P'' = P^{(2)}$.

1. Justifier que l'on est exactement sous toutes les hypothèses faites dans la partie I.
2. Préciser qui est $\mathrm{Ker}(f^2)$.
3. Exhiber explicitement une base $\mathcal{B}$ de $E = \mathbb{R}_5[X]$ du type de la question **I - 3a**.

Partie III : un second exemple

Dans cette question, on pose $E = \mathbb{R}^3$ et f est l'endomorphisme de E défini par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & f(x, y, z) = (x + y + 2z, x - y, -x + y) \end{array} \right. .$$

1. (a) Déterminer une base et la dimension de chacun des sous-espaces $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
   (b) Déterminer une base et la dimension de chacun des sous-espaces $\mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f^2)$.
   (c) En déduire que l'on est exactement sous toutes les hypothèses faites dans la partie I.
   (d) Exhiber explicitement une base $\mathcal{B} = (\vec{s}, f(\vec{s}), f^2(\vec{s}))$ du type de la question **I - 3a**.
2. On désire déterminer une description complète de l'ensemble $C_f = \{g \in \mathcal{L}(E) \,|\, f \circ g = g \circ f\}$, l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f.
   (a) Vérifier que C_f est un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$.
   (b) On pose $\mathcal{P}$, le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ engendré par I, f et f^2, i.e $\mathcal{P} = \mathrm{vect}(\mathrm{I}, f, f^2)$ où I désigne l'application identité de $\mathbb{R}^3$. Il y a une inclusion évidente entre $\mathcal{P}$ et C_f : laquelle et pourquoi ?
   (c) Soit $g \in C_f$: justifier qu'il existe trois réels a, b et c tels que $g(\vec{s}) = a\vec{s} + bf(\vec{s}) + cf^2(\vec{s})$. Puis montrer qu'on a l'égalité des applications linéaires $g = a\mathrm{I} + bf + cf^2$.
   (d) Conclure en donnant une base et la dimension de C_f.

Exercice 4 Rappel : si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et $(a,b) \in I^2$ alors la formule de «Taylor reste intégral» s'écrit

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $f \in \mathcal{C}^{\infty}([1,2],\mathbb{R})$ définie par $f(x) = \dfrac{\ln^2(x)}{2}$.

Pour $n \geqslant 1$, on pose : $\quad H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad$ et $\quad a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} H_k$.

On donne l'équivalent classique $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

1. Pour $x \in [1,2]$, calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$.
2. Montrer qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ de réels telles que pour $n \geqslant 2$ et $x \in [1,2]$,
$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^n}(u_n - v_n \ln(x))$$
et préciser les relations entre u_{n+1}, v_{n+1}, u_n et v_n.
3. Déterminer v_n en fonction de n.
En posant $w_n = \dfrac{u_n}{(n-1)!}$, exprimer, pour $n \geqslant 2$, u_n en fonction de H_{n-1} et une factorielle.
4. A l'aide de la formule de Taylor, justifier, pour tout $n \geqslant 2$,
$$a_{n-1} + \frac{1}{2}\ln^2(2) = (-1)^{n+1} \int_1^2 (2-t)^n \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$
où $\varphi(t) = \dfrac{H_n - \ln(t)}{t^{n+1}}$.
5. Montrer
$$\left| a_{n-1} + \frac{1}{2}\ln^2(2) \right| \leqslant \frac{H_n + \ln 2}{n+1}$$
et en déduire la limite de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$.