La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 Applications du cours - questions indépendantes.

1. **Question de cours** : rappeler, hypothèses comprises, la formule de Taylor pour les polynômes.
2. **Question de cours** : soit $r \in \mathbb{K}$, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $m \in \mathbb{N}^*$ ($\mathbb{K}$ représente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
   (a) Donner la définition de
   « r est une racine de **multiplicité** m (exactement) du polynôme P ».
   (b) Donner une caractérisation (sans démonstration) de cette propriété faisant intervenir des dérivées de P.
3. Soit le polynôme $P(X) = X^4 - aX^3 + aX - 1$ où a désigne une constante.
   (a) Montrer que $X^2 - 1$ divise P.
   (b) Déterminer a tel que -1 soit racine de multiplicité **au moins** 2 de P. Préciser alors la multiplicité de -1 comme racine de P et factoriser ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.
4. On considère le polynôme $P(X) = 36X^3 - 12X^2 - 5X + 1$. On donne l'information suivante : une des racines de P est la somme des deux autres. Est-il possible de déterminer toutes les racines de P ?
5. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et les deux sous-espaces
   $$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}\,((1, -1, 1)).$$
   (a) Montrer que F est un plan vectoriel.
   (b) Montrer que $E = F \oplus G$.
   (c) On appelle p le projecteur sur F selon G. Préciser $p((x, y, z))$ pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

PROBLEME

Une serrure de coffre-fort possède n boutons numérotés de 1 à n (avec $n \geqslant 1$). Un n-**code** consiste à pousser dans un certain ordre **tous les boutons**. Chaque bouton n'est poussé qu'une seule fois mais il est possible de pousser simultanément plusieurs boutons.

La modélisation est effectuée de la façon suivante : pour tout entier $n \geqslant 1$, on appelle n-**code** toute suite ordonnée $(P_1, P_2, \ldots, P_j)$ de j parties $P_1, P_2, \ldots, P_j$ de l'ensemble $[[1, n]] = \{1, 2, \ldots, n\}$ (avec $1 \leqslant j \leqslant n$) ; ces parties sont toutes non vides, deux à deux disjointes et leur réunion est égale à l'ensemble $[[1, n]]$. On note a_n le nombre de n-**codes**.

Par exemple :

- pour $n = 1$, il y a un seul 1-**code**, qui est $(\{1\})$.
- pour $n = 2$, il y a trois 2-**codes**, qui sont $(\{1\}, \{2\})$ et $(\{2\}, \{1\})$ et $(\{1, 2\})$. Le premier 2-**code** consiste à appuyer d'abord sur le bouton 1 puis sur le bouton 2, le deuxième à appuyer d'abord sur le 2 puis sur le 1, le troisième à appuyer simultanément sur les boutons 1 et 2.
- par convention, on pose $a_0 = 1$.

1. `Préliminaires - questions de cours.`
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E_n, un ensemble à n éléments (par exemple $E_n = [[1, n]]$). Il n'est pas demandé de démonstration dans les quatre questions suivantes.
   (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Quel est le nombre de parties de E_n possédant k éléments ?
   (b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Quel est le nombre d'applications de E_p vers E_n ?
   (c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Quel est le nombre d'injections de E_p vers E_n ?
   (d) Quel est le nombre de bijections de E_n vers E_n ?

2. `Quelques exemples. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.`
   (a) Soit $n \geqslant 1$. Combien y a-t-il de n-**codes** pour lesquels les boutons sont poussés l'un après l'autre ?
   (b) On choisit, dans cette question, $n = 3$: dresser la liste exhaustive des 3-**codes** et déterminer la valeur de a_3.
3. `Une formule de récurrence`
   Soit $n \geqslant 1$ et $S = (P_1, P_2, \ldots, P_j)$ un n-**code**.
   (a) Soit $k \in [[1, n]]$: combien y a-t-il de choix possibles pour la partie P_1 lorsque l'on impose $\mathrm{card}(P_1) = k$?
   (b) Combien y a-t-il de n-**codes** S dont le premier élément P_1 possède k éléments ?
   (c) Montrer :
   $$a_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k} \quad \text{puis} \quad a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a_k.$$
   (d) Vérifier, à l'aide de la formule précédente, la valeur de a_3 trouvée à la question **(2b)**.
4. `Une majoration de` a_n
   (a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \dfrac{a_n}{n!}$. Démontrer :
   $$\text{pour tout entier } n \geqslant 1,\ b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{n-k}}{k!}.$$
   (b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction polynomiale T_n par :
   $$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$
   A l'aide d'un raisonnement par récurrence, prouver :
   $$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \text{pour tout } x \in [0, +\infty[, \quad e^x \geqslant T_n(x).$$
   <u>Indication</u> : qui est $T'_{n+1}(x)$?
   (c) En déduire : pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$b_n \leqslant \frac{1}{(\ln 2)^n}.$$
5. `Une minoration de` a_n
   (a) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer, pour tout entier $n \geqslant 1$:
   $$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, e^t \, \mathrm{d}t.$$
   (b) En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$:
   $$e^{\ln 2} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\ln 2)^k}{k!} + 2\frac{(\ln 2)^n}{n!}.$$
   (c) En déduire : pour tout entier $n \geqslant 1$,
   $$\frac{1}{2\,(\ln 2)^n} \leqslant b_n.$$
   Quelle conséquence en tire-t-on sur la suite (a_n) ?
6. `Liens entre les` a_n `et une fonction` f
   On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I =]-\infty, \ln(2)[$ par
   $$f(x) = \frac{1}{2 - e^x}.$$

(a) Justifier que f est de classe C^∞ sur I.

(b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, dériver n fois, par rapport à x, la quantité $f(x)\,(2-e^x)$.

(c) Pour $n \geqslant 1$, en déduire une expression de $f^{(n)}(0)$ à l'aide de $f^{(0)}(0), f^{(1)}(0), \dots, f^{(n-1)}(0)$.

(d) Justifier alors : pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_n = f^{(n)}(0).$$

(e) Calculer le développement limité, au voisinage de $x = 0$ à l'ordre 3, de $f(x)$.
Vérifier à nouveau la validité de la valeur de a_3 trouvée à la question **(2b)**.

Les questions suivantes sont largement indépendantes de ce qui précède.

7. `Construction d'une suite de polynômes`

   (a) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un **polynôme** P_n tel que :
   $$\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(e^x)}{(2-e^x)^{n+1}} \qquad (*).$$
   Au passage, on aura établi une relation du type $P_{n+1} = X\left(\alpha P_n + (\beta + \gamma X) P'_n\right)$, où α, β et γ sont des constantes, dépendant éventuellement de n, que l'on précisera.

   (b) Justifier que, à n fixé, il y a un unique polynôme P_n vérifiant la relation $(*)$.

   (c) Donner les polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3.

   (d) Prouver, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, que P_n est de degré n. Quel est son coefficient dominant ?

   (e) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, que vaut $P_n(0)$? Que représente $P_n(1)$?

8. `Etude d'une racine de` P_n

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence d'un polynôme Q_n tel que $P_n = XQ_n$.

   (b) Quelle relation a-t-on entre Q_{n+1}, Q_n et Q'_n ?

   (c) On définit : $u_n = Q_n(0)$. Déterminer u_n en fonction de n.

   (d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 0 est une racine simple de P_n.

9. RETOUR `vers le DNS n°10`

   On a étudié $\left\{ {n \atop p} \right\}$, le nombre de partitions en p classes d'un ensemble à n éléments.
   On rappelle

   - les conventions : $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$ et pour $n \geqslant 1$, $p \geqslant 1$: $\left\{ {n \atop 0} \right\} = \left\{ {0 \atop p} \right\} = 0$.
   - la formule du triangle de Stirling (pour $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$) : $\left\{ {n \atop p} \right\} = p\left\{ {n-1 \atop p} \right\} + \left\{ {n-1 \atop p-1} \right\}$.
   - pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$: $\left\{ {n+1 \atop p+1} \right\} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\{ {k \atop p} \right\} = \sum_{k=p}^{n} \binom{n}{k} \left\{ {k \atop p} \right\}$.

   Soit $n \geqslant 0$. Justifier la formule :
   $$a_n = \sum_{k=0}^{n} k! \left\{ {n \atop k} \right\}$$

   (a) d'abord à l'aide d'un raisonnement utilisant un dénombrement.

   (b) puis à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur n.