La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{(n+1)\,2^n}.$$

1. Montrer que les deux suites sont adjacentes.
2. Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite notée ℓ et que $\dfrac{5}{8} \leqslant \ell \leqslant \dfrac{3}{4}$.
3. Comment choisir n pour que u_n et v_n soient des valeurs approchées de ℓ à 10^{-3} près ?
4. On définit pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$.
   (a) Exprimer u_n à l'aide de f.
   (b) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et simplifier $f'(x)$.
   (c) En déduire : $u_n = \ln(2) - \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,\mathrm{d}x$.
   (d) Déterminer la valeur de la limite $\ell = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}(u_n)$.

Exercice 2

Question préliminaire

Effectuer une étude rapide et tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \end{array} \right. .$$

I - Etude de prolongements

1. Donner les développements limités d'ordre 3 en 0 des fonctions
$$f \quad \text{et} \quad \arctan \quad \text{et} \quad \tan.$$
2. On définit la fonction φ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(x)}{\tan(x)} & \text{si} \quad x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\\ a & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ où a désigne un réel. Montrer qu'il est possible de choisir a pour que φ soit continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   On suppose désormais que a possède cette valeur.
3. Prouver que φ est de classe C^1 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
4. Est-il possible de prolonger φ par continuité sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$?
   Si oui, ce prolongement est-il de classe C^1 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$?

II - Une suite récurrente

1. Prouver que l'équation «$x^3 + x - 1 = 0$» possède une et une seule solution réelle, notée α.
   Prouver $0 < \alpha < 1$.
2. (a) Vérifier que α est un point fixe de la fonction f.
   (b) Rappeler l'énoncé du théorème de l'*inégalité des accroissements finis* (hypothèses et conclusion).
   (c) Etudier les variations de f' sur $[0, 1]$, puis montrer que f est C-lipschitzienne sur l'intervalle $[0, 1]$ où C est une constante vérifiant $0 < C < 1$.
3. On définit la suite $u = (u_n)_{n \geqslant 0}$ par :
   $$u_0 = 0 \text{ et, pour tout entier } n \geqslant 0,\ u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{1 + u_n^2}.$$
   (a) Montrer : pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n \in [0, 1]$.
   (b) Montrer : pour tout entier $n \geqslant 0$,
   $$|u_n - \alpha| \leqslant C^n.$$
   (c) Que peut-on conclure du résultat précédent ?
4. A l'aide de ce qui précède, indiquer une méthode permettant d'obtenir une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

III - Une suite implicite

Pour tout entier $n \geqslant 1$ on considère l'équation
$$(E_n) : « \ x \in [0, +\infty[\quad \text{et} \quad f(x) = x^n \ ».$$

1. Montrer : pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe une et une seule solution, que l'on notera v_n, à l'équation (E_n).
   Indication : on utilisera le polynôme Q_n défini par $Q_n(x) = x^{n+2} + x^n - 1$.
2. Déterminer v_1.
3. Justifier : pour tout $n \geqslant 1$, $0 < v_n < 1$.
4. Pour tout $n \geqslant 1$, simplifier puis déterminer le signe de $Q_{n+1}(v_n)$.
   En déduire la monotonie de la suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$.
5. Prouver que la suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ converge : on note $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} (v_n)$ sa limite.
6. Déterminer la valeur de ℓ.
7. Justifier l'égalité $\ln(v_n) = -\dfrac{\ln(1 + v_n^2)}{n}$ et en déduire un équivalent de $v_n - \ell$ (lorsque $n \to +\infty$) puis un développement asymptotique de v_n à deux termes.

IV - Une équation fonctionnelle

On cherche les fonctions g solutions du problème $(\mathcal{P})$
$$« \ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \textbf{ continue} \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et vérifiant : } \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = g\left(\frac{1}{1 + x^2}\right) \ ».$$

1. Dans cette question, on suppose que g est une solution de $(\mathcal{P})$.
   (a) Soit un réel $a \in \mathbb{R}$: on définit une suite w par
   $$w_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\, w_{n+1} = f(w_n) = \frac{1}{1+w_n^2}.$$
   Montrer : pour tout $n \geqslant 1$, $w_n \in [0,1]$.
   Puis, à l'aide de la partie **(II)**, prouver (rapidement) que la suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ converge et préciser la valeur de sa limite.
   (b) Soit la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $\gamma_n = g(w_n)$. Vérifier que cette suite est constante.
   (c) Que peut-on en conclure concernant la fonction g ?
2. Conclure.

Exercice 3

On définit la fonction f par
$$f(x) = \frac{1}{1-x+x^2}.$$

1. (a) Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f, et justifier que f est de classe C^∞ sur D_f.
   (b) Calculer le développement limité d'ordre 3, en $x = 0$, de $f(x)$.
   Quelle conséquence peut-on en tirer concernant la courbe représentative de f ? Un schéma clair est également attendu.
2. (a) Rappeler l'énoncé du théorème de Leibniz (hypothèses et formule comprises).
   (b) En partant de l'égalité $(1-x+x^2)f(x) = 1$, prouver que, pour tout entier $n \geqslant 2$ et $x \in D_f$:
   $$(1-x+x^2)f^{(n)}(x) + (a_n x + b_n)f^{(n-1)}(x) + c_n f^{(n-2)}(x) = 0,$$
   où a_n, b_n et c_n sont des quantités entières ne dépendant que de n, que l'on explicitera [1].
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.
   (a) Montrer que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite linéaire récurrente d'ordre deux.
   (b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = -u_n$.
   En **déduire** que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique.
4. <u>Quelques applications</u>
   (a) A l'aide de ce qui précède, donner rapidement le développement limité d'ordre 12, en $x = 0$, de $f(x)$.
   (b) Calculer $u_{\mathbf{2025}}$.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(5^{2n+1}+1\right)$ est divisible par 6.
   En déduire la valeur de $u_{5^{\mathbf{2025}}}$.

1. Pour vérification : $a_3 = 6$, $b_3 = -3$, $c_3 = 6$.

Exercice 4

On considère $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$: on note alors $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ concaves, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ et vérifiant $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$.
Pour $f \in \mathcal{E}$, on note

$$\ell(f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Un exemple simple.
   (a) Montrer qu'il existe dans $\mathcal{E}$, une unique fonction notée f_0 affine et donner l'expression de $f_0(x)$ pour $x \in [a,b]$.
   (b) Calculer $\ell(f_0)$ et vérifier qu'on obtient la longueur de la courbe représentative de f_0 sur $[a,b]$.
2. Dans cette question f et g sont deux éléments de $\mathcal{E}$.
   On note $f \leqslant g$ lorsque «$\forall x \in [a,b],\ f(x) \leqslant g(x)$».
   Enfin, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $r(x) = \sqrt{1+x^2}$.
   (a) Quelle est la convexité/concavité de r sur $\mathbb{R}$?
   (b) Montrer que pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on a
   $$r(u) - r(v) \geqslant r'(v) \times (u - v).$$
   (c) En déduire, pour tout $(f,g) \in \mathcal{E}^2$,
   $$\ell(g) - \ell(f) \geqslant \int_a^b (r' \circ f')(t) \times (g'(t) - f'(t))\,\mathrm{d}t.$$
   (d) Etudier la monotonie de la fonction $\varphi = r' \circ f'$.
   (e) Montrer que si $f \leqslant g$ alors $\ell(f) \leqslant \ell(g)$.
3. En déduire [2] que $L = \inf\limits_{f \in \mathcal{E}} (\ell(f))$ existe et donner sa valeur.
4. Question bonus : que pensez-vous de $\sup\limits_{f \in \mathcal{E}} (\ell(f))$?

2. On rappelle les notations : $\inf\limits_{f\in\mathcal{E}}(\ell(f)) = \inf\{\ell(f) \mid f \in \mathcal{E}\}$ et $\sup\limits_{f\in\mathcal{E}}(\ell(f)) = \sup\{\ell(f) \mid f \in \mathcal{E}\}$, sous réserve d'existence.