La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1

Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit la matrice :

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 - 2a & a & a \\ a & 1 - 2a & a \\ a & a & 1 - 2a \end{pmatrix}.$$

1. Etude des matrices $M(a)$

- Déterminer le déterminant de la matrice $M(a)$ en fonction de a .
- Préciser pour quelles valeurs de a la matrice $M(a)$ est inversible.
- On définit la matrice Q par $M(a) = I + aQ$ où I désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Détailler la matrice } Q \text{ et calculer } Q^2 \text{ en fonction de } Q.$$

- Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ (fonction des constantes a et b) tel que $M(a) \times M(b) = M(c)$.
- En déduire l'inverse de $M(a)$ lorsqu'il existe.
- Complément (une autre manière de calculer l'inverse de $M(a)$).

On rappelle $M(a) = I + aQ$. Déterminer une relation entre les matrices I , $M(a)$ et $M(a)^2$. Retrouver alors, lorsque cela a un sens, une expression de l'inverse de la matrice $M(a)$ que l'on comparera à celle obtenue précédemment.

2. Une suite récurrente

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = (1 - 3a)u_n + a$.

- Déterminer une expression de u_n en fonction de n (et de a).
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M(a)^n = M(u_n)$.

3. Un autre calcul de $M(a)^n$

On définit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- Montrer que P est inversible, calculer son inverse P^{-1} .
- Calculer $P^{-1}QP$ puis vérifier que la matrice $D = P^{-1}M(a)P$ est diagonale.
- Retrouver alors l'expression de $M(a)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et la comparer avec celle trouvée à la question **(2b)**.
- Retrouver, à l'aide de la question **(3b)**, et lorsque cela a un sens, une expression de l'inverse de $M(a)$ et comparer le résultat obtenu avec celui de la question **(1e)**.

4. Encore un autre calcul de $M(a)^n$

- (a) On rappelle que la matrice Q est celle définie par $M(a) = I + aQ$.
Pour tout entier $k \geq 0$, que vaut Q^k ?
- (b) En déduire une nouvelle façon de calculer $M(a)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, et comparer ce résultat à ceux obtenus aux questions (2b) et (3c).

Exercice 2

Soit $\mathcal{E}$, l'ensemble des matrices de la forme

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Autrement dit : $\mathcal{E} = \{M(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. (a) L'ensemble $\mathcal{E}$ est-il stable par addition ?
(b) Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ est stable par le produit matriciel.
Justifier que I_3 appartient à $\mathcal{E}$ et que toutes les matrices de $\mathcal{E}$ commutent entre elles.
(c) Si une matrice $M(a, b)$ appartient à $\mathcal{E}$: est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse et montrer que son inverse est aussi dans $\mathcal{E}$.
2. Pour toute application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on définit, pour tout réel x , les matrices $\widehat{M}(x)$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \widehat{M}(x) = M(x, f(x)).$$

On cherche les fonctions f solutions du problème suivant :

$$\ll f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \widehat{M}(x)\widehat{M}(y) = \widehat{M}(x+y) \gg \quad (*).$$

- (a) Montrer que, si f est une solution du problème (*), alors f vérifie une équation fonctionnelle de la forme
$$\ll \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = \alpha f(x) + \beta f(y) + \varphi(x, y) \gg$$
où α, β sont des constantes à déterminer, ainsi que $\varphi(x, y)$, une quantité qui dépend (simplement) de x et y .
- (b) Montrer que, si f est une solution du problème (*), alors
  - $f(0) = 0$
  - $\widehat{M}(0) = I_3$
  - pour tout réel x , $\widehat{M}(x)$ est inversible et $\widehat{M}^{-1}(x) = \widehat{M}(-x)$.
- (c) Montrer que, si f est une solution du problème (*), alors sa dérivée f' est une fonction affine.
- (d) Déterminer exactement toutes les solutions du problème (*).

3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & a & \frac{a^2}{2} \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de P^n .

Cette expression est-elle encore valable avec $n = -1$?

Exercice 3

Le but de cet exercice est de démontrer que tous les termes de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$v_0 = v_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = 14v_{n+1} - v_n - 4$$

sont des carrés (d'entiers) (comme $2025 = 45^2$).

1. Préliminaires : on note $r_1 = 2 + \sqrt{3}$ et $r_2 = 2 - \sqrt{3}$,

(a) Calculer $r_1 \times r_2$ et $r_1 + r_2$.

(b) Développer $(X^2 - 4X + 1)(X^2 + 4X + 1)$.

En déduire la valeur de $(r^4 - 14r^2 + 1)$ pour $r = r_1$ ou $r = r_2$.

(c) Montrer que le système suivant, d'inconnue (x, y)

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ r_1x + r_2y = 1 \end{cases} .$$

possède une, et une seule solution donnée par $(x, y) = \left(\frac{1}{1 + r_1}, \frac{1}{1 + r_2} \right)$.

(d) Question de cours

Recopier, et compléter (caractérisation de la partie entière d'un réel x) :

$$(N = \lfloor x \rfloor) \Leftrightarrow (\dots \quad \text{ET} \quad \dots) .$$

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite définie par

$$u_0 = u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n .$$

(a) Donner l'expression générale de u_n en fonction de n .

(b) En déduire les valeurs des limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) .$$

3. On pose $v_n = u_n^2$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$).

(a) Montrer que

$$v_n = \frac{r_1^{2n-1}}{6} + \frac{r_2^{2n-1}}{6} + \frac{1}{3} .$$

(b) Montrer que la suite $(v_{n+2} - 14v_{n+1} + v_n)$ est constante.

En déduire le résultat énoncé en introduction.

4. Une autre expression de v_n .

(a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$: $\frac{r_2^p}{6} + \frac{1}{3} \in]0, 1]$.

(b) En déduire l'encadrement, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n - 1 \leq \frac{1}{6} (2 + \sqrt{3})^{2n-1} < v_n.$$

(c) Justifier alors que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \left\lfloor \frac{(2 + \sqrt{3})^{2n-1}}{6} \right\rfloor + 1.$$

Exercice 4 L'irrationalité de $\sqrt{N}$.

Soit N un entier naturel qui ne soit pas un carré, ainsi $\sqrt{N}$ n'est pas un entier.

On se propose de prouver que $\sqrt{N} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, i.e $\sqrt{N}$ est un irrationnel.

Pour cela, on suppose que $\sqrt{N} \in \mathbb{Q}$ et on écrit

$$\sqrt{N} = \frac{p_0}{q_0} \text{ où } (p_0, q_0) \in (\mathbb{N}^*)^2$$

et on note $a = \lfloor \sqrt{N} \rfloor$. On définit les suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_{n+1} = -ap_n + Nq_n$$

$$q_{n+1} = p_n - aq_n$$

1. Justifier : $a < \sqrt{N} < a + 1$.

2. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_n \text{ et } q_n \text{ sont des entiers non nuls tels que } \sqrt{N} = \left| \frac{p_n}{q_n} \right|.$$

3. Montrer que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

4. Montrer qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_n = \alpha^n p_0.$$

5. Conclure.