La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 COURS et APPLICATIONS DU COURS - Questions largement indépendantes

1. Donner les développements limités d'ordre $\boldsymbol{n}$ lorsque $x \to 0$ (notés $\mathrm{DL}_n(0)$) des quantités suivantes (où α désigne une constante réelle) :
   (a) $\mathrm{DL}_{\mathbf{3}}(0)$ de
   $$\tan(x) \qquad \textbf{et} \qquad (1+x)^\alpha \qquad \textbf{et} \qquad \sqrt{1+x}. \qquad .$$
   (b) $\mathrm{DL}_{\mathbf{5}}(0)$ de
   $$\mathrm{sh}(x) \ \textbf{et} \ \mathrm{ch}(x) \ \textbf{et} \ \sin(x) \ \textbf{et} \ \cos(x) \ \textbf{et} \ \ln(1+x) \ \textbf{et} \ \frac{1}{1+x} \ \textbf{et} \ \arctan(x) \ \textbf{et} \ e^x.$$
   Les réponses doivent être écrites sur la feuille jointe à ce sujet (ne pas oublier de la glisser dans votre copie).
2. Donner les solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de chacune des équations différentielles suivantes :
   (a) (E_1) « $y''(x) + 4y'(x) + 8y(x) = 4$ ».
   (b) (E_2) « $y''(x) + y'(x) + \frac{1}{4}y(x) = \cos(x)$ ».
   (c) (E_3) « $y''(x) + y'(x) - 6y(x) = e^{2x}$ ».
3. Pour tout paramètre $k \in \mathbb{R}$, on définit la fonction f_k par
   $$f_k(x) = \ln(1+x) + \frac{k}{1+x}.$$
   On désigne par $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.
   (a) Déterminer le développement limité d'ordre 3, en $x = 0$ de $f_k(x)$.
   (b) Donner l'équation de la tangente T_k à $\mathcal{C}_k$ en $x = 0$.
   (c) Existe-t-il des courbes $\mathcal{C}_k$ qui possèdent une tangente horizontale en $x = 0$? Si oui, tracer l'allure locale de ces courbes et de leur tangente en 0.
   (d) Existe-t-il des courbes $\mathcal{C}_k$ qui possèdent un point d'inflexion en $x = 0$? Si oui, tracer l'allure locale de ces courbes et de leur tangente en 0.
   (e) On définit la fonction ψ par $\psi(x) = \dfrac{f_k(x)}{x}$. Montrer qu'il existe une seule valeur de k permettant de prolonger ψ **par continuité** en 0. On considère cette fonction ψ. Justifier que la fonction ψ est dérivable en 0, donner la valeur de $\psi'(0)$ et tracer l'allure de la courbe représentative de ψ avec sa tangente au voisinage de 0.

Exercice 2 On considère l'équation différentielle
$$(E) \qquad (e^x - 1)\, y'(x) + e^x y(x) = 1.$$
On désigne par I **un** intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$. On note $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$.

1. Donner la forme générale des solutions de l'équation homogène sur I.
2. A l'aide de la méthode de la variation de la constante, déterminer une solution particulière sur I. Donner ensuite la forme générale des solutions de (E) sur I.

3. Pour $m \in \mathbb{R}$, soit f_m la solution sur I_2 de (E) telle que $f_m(\ln(2)) = m\ln(2)$.

   (a) Donner l'expression de $f_m(x)$ pour $x \in I_2$ en fonction de m.

   (b) Donner une expression de la tangente T_m en A d'abscisse $\ln(2)$ à la courbe représentative de f_m.

   (c) Existe-t-il une valeur de m pour laquelle cette tangente est horizontale ?

   (d) Montrer que les tangentes T_m, avec $m \in \mathbb{R}$, sont concourantes en un point dont on déterminera les coordonnées.

4. Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par
$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}.$$

   (a) Justifier que f est solution de (E) sur I_1 et sur I_2.

   (b) Donner le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $f(x)$.
   En déduire que la fonction f est prolongeable par continuité en 0. Désormais, f désignera cette fonction ainsi prolongée sur $\mathbb{R}$.
   Justifier que f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ (en entier) et donner l'allure locale en $x = 0$.

   (c) La fonction f est-elle solution de (E) sur $\mathbb{R}$ en entier ?

5. On suppose que g est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ en entier.

   (a) Donner l'expression de g sur I_1 et sur I_2 en fonction de deux constantes K_1 et K_2.

   (b) Justifier
$$\lim_{x\to -0^-} ((e^x - 1)\, g(x)) = \lim_{x\to -0^+} ((e^x - 1)\, g(x)) = 0,$$
   et en déduire les valeurs de K_1 et K_2. Qu'en déduire pour g ?

6. Quelles sont les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3 Soit n, un entier naturel.

On considère, sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$, l'équation différentielle suivante :
$$xy' + ny = \frac{1}{1+x^2} \quad (E_n)$$

1. Résoudre sur I, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'équation homogène associée (EH_n) :
$$xy' + ny = 0 \quad (EH_n)$$

2. (a) Déterminer des constantes a, b et c telles que, pour tout $x \in I$:
$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}.$$

   (b) Résoudre l'équation (E_0) sur l'intervalle I.

3. Résoudre successivement, sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$:

   (a) l'équation (E_1).

(b) l'équation (E_2).

(c) l'équation (E_3).

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note :
$$\text{pour tout } x \geqslant 0,\ F_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$
Résoudre, sur I, l'équation (E_n). On exprimera les solutions au moyen de la fonction F_n.

5. Dans cette question, on va expliciter une expression de $F_n(x)$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$: simplifier $F_n(x) + F_{n+2}(x)$.

   (b) Exprimer $F_1(x)$ et $F_2(x)$ en fonction de $x \in I$.

   (c) Etablir, pour tout $n \geqslant 2$:
$$\forall x \in I,\ F_{2n}(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2}\ln(1+x^2) + (-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \frac{x^{2k}}{2k}.$$

   (d) Etablir, pour tout $n \geqslant 1$:
$$\forall x \in I,\ F_{2n+1}(x) = (-1)^n \mathrm{Arctan}(x) + (-1)^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

   (e) <u>Première application</u> : exhiber les solutions de (E_5) sur I.

   (f) <u>Seconde application</u> : établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on a
$$0 \leqslant F_n(x) \leqslant \frac{x^n}{n}.$$
   En déduire, à l'aide de **5c)** :
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right) = \ln(2).$$
   De même, déterminer la valeur de la limite suivante :
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}}{2k+1}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{n}}{2n+1}\right) = \ ?$$

6. On note f, la solution de (E_1) sur $I =]0, +\infty[$ vérifiant la condition $f(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

   (a) Expliciter $f(x)$ en fonction de x.

   (b) Etablir que, pour tout $x > 0$:
$$\frac{x}{1+x^2} \leqslant \mathrm{Arctan}(x) \leqslant x.$$

   (c) En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle I.

   (d) Dresser le tableau de variation de f sur I (limites aux bords comprises et justifiées). En particulier, on montrera que f admet une limite finie ℓ en 0 que l'on calculera. On posera désormais $f(0) = \ell$.

   (e) Prouver que f est dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$.

   (f) Tracer le graphe de la fonction f.

7. Dans cette question, on généralise des résultats établis ci-dessus dans le cas particulier $n = 1$. Soit un entier $n \geqslant 1$.

(a) Etablir que, pour tout $x > 0$:
$$\frac{1}{(1+x^2)}\frac{x^n}{n} \leqslant F_n(x) \leqslant \frac{x^n}{n}.$$

(b) En déduire un équivalent simple de $F_n(x)$ lorsque x tend vers 0^+.

(c) Montrer que, parmi les solutions de (E_n) sur $I =]0, +\infty[$, il y en a une et une seule qui possède une limite finie en 0. On note f_n cette fonction, prolongée en 0 par continuité.

(d) Justifier que f_n est dérivable en 0.

(e) En n'oubliant pas que f_n est une solution de l'équation différentielle (E_n), déterminer le sens de variation de f_n sur $[0, +\infty[$.

(f) Prouver que, pour tout $n \geqslant 2$: $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \frac{\frac{\pi}{4} - f_n(1)}{n-1}$.

Exercice 4 `Exercice bonus - Ne le traiter que si tout le reste a été abordé.`

Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deux fonctions continues, et l'équation différentielle
$$(E) : « \ y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \ ».$$
On cherche les équations différentielles (E) vérifiant la propriété $(\mathcal{P})$ suivante :

$(\mathcal{P})$ «si y est solution de (E), alors y^2 est aussi solution de (E)».

1. On suppose dans cette question que l'équation (E) vérifie la propriété $(\mathcal{P})$ et qu'elle n'est pas homogène i.e b n'est pas la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. Soit y une solution de (E) : montrer que, si y s'annule sur $\mathbb{R}$, alors y est la fonction constante nulle sur $\mathbb{R}$. Conséquence ?
2. Donner toutes les équations (E) vérifiant la propriété $(\mathcal{P})$.