La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 COURS et APPLICATIONS DU COURS - Questions largement indépendantes

1. Compléter (pas de preuve exigée) **sur la feuille jointe à ce sujet (à glisser dans votre copie)** :
   (a) $\forall x \in \ldots\ldots$, $\text{Arctan}'(x) = \ldots\ldots.$
   (b) $\forall x \in \ldots\ldots$, $\text{Arccos}'(x) = \ldots\ldots.$
   (c) $\forall x \in \ldots\ldots$, $\text{Arcsin}'(x) = \ldots\ldots.$
   (d) $(\text{Arcsin}(\sin(t)) = t) \Leftrightarrow (t \in \ldots\ldots)$
   (e) $(\text{Arccos}(\cos(t)) = t) \Leftrightarrow (t \in \ldots\ldots)$
   (f) $(\text{Arctan}(\tan(t)) = t) \Leftrightarrow (t \in \ldots\ldots)$
   (g) $\forall x \in \ldots\ldots$, $\text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x) = \ldots\ldots.$
   (h) $\forall x \in \ldots$, $\sin(\text{Arccos}(x)) = \cos(\text{Arcsin}(x)) = \ldots$
   (i) Donner les valeurs exactes de :

$$\text{Arctan}\left(-\sqrt{3}\right) = \ldots\ldots, \quad \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \ldots\ldots, \quad \text{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) = \ldots\ldots, \quad \text{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \ldots\ldots$$

2. (a) Montrer, sous réserve d'existence, l'égalité suivante : $\cos(2x) = \dfrac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$.
   (b) Comparer alors les deux nombres $A = \text{Arccos}\left(\dfrac{4}{5}\right)$ et $B = 2\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{3}\right)$.
3. *Dans cette question de vérification des techniques de calculs, il n'est pas demandé de justifier l'existence des intégrales.*
   (a) Calculer l'intégrale $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2-4x+4}\mathrm{d}x$
   (b) Calculer l'intégrale $I_2 = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-6x+8}\mathrm{d}x$.
   (c) Calculer l'intégrale $I_3 = \displaystyle\int_1^{2+\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2-4x+5}$.
4. (a) Simplifier $\text{ch}(\ln 2)$ et $\text{sh}(\ln 2)$.
   (b) Pour tout k réel, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f_k(x) = \text{ch}(x) + ke^x,$$
   de courbe représentative $\mathcal{C}_k$.
   Donner une équation cartésienne de la tangente T_k à $\mathcal{C}_k$ au point A_k d'abscisse $\ln(2)$.
   (c) Montrer que toutes les droites T_k, lorsque k parcourt $\mathbb{R}$, sont concourantes en un point B dont on précisera les coordonnées.

Exercice 2 On considère les deux fonctions f et g définies par

$$f(x) = \frac{1}{2}\text{Arctan}(\text{sh}(x)) \quad \text{et} \quad g(x) = \text{Arctan}\left(\frac{\text{sh}(x)}{1+\text{ch}(x)}\right).$$

1. Question de cours : rappeler puis prouver, la relation liant, pour tout réel x, $\text{ch}^2(x)$ et $\text{sh}^2(x)$.

2. Préciser et justifier le domaine de définition de f et de g.
3. Préciser les points où f est dérivable et donner une expression simplifiée de f' (l'expression obtenue ne fera intervenir que la fonction ch).
4. Faire de même avec la fonction g. On détaillera bien le calcul effectué.
5. En déduire que $f = g$ sur un intervalle à préciser.
6. Deux applications de l'égalité entre f et g.
   (a) Donner une expression simple de $\text{ch}\left(\frac{1}{2}\ln 3\right)$ et de $\text{sh}\left(\frac{1}{2}\ln 3\right)$.
   (b) En écrivant $f\left(\frac{1}{2}\ln 3\right) = g\left(\frac{1}{2}\ln 3\right)$, quelle tangente de quel «angle» peut-on en déduire ?
   (c) Résoudre l'équation : $\text{sh}(x_0) = 1$.
   Puis, en comparant $f(x_0)$ et $g(x_0)$, en déduire la tangente d'un autre «angle».

Exercice 3

1. Quelques résultats préliminaires
   (a) Donner les valeurs de $\text{sh}(\ln(3))$ et $\text{ch}(\ln(3))$ sous forme de nombres rationnels mis sous forme irréductible.
   (b) On rappelle la définition de la fonction *tangente hyperbolique* : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{th}(x) = \dfrac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$.
   Exprimer sa dérivée à l'aide uniquement de la fonction ch.
   (c) Soit a et b, deux constantes réelles avec $a \neq 0$: rappeler (aucune preuve n'est exigée) les primitives de la fonction $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{(x+b)^2 + a^2}$.
   (d) Soit $x \in [0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$. Prouver : $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.
2. On pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\ln(3)} \left(\frac{1}{\text{ch}(x)}\right)^n \mathrm{d}x$.
   (a) Justifier que u_n est bien définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Calculer u_0 et u_2.
   (c) Calculer la valeur de u_1 à l'aide du changement de variable $t = \text{sh}(x)$.
3. (a) Vérifier que la suite $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone.
   (b) Montrer que cette suite possède une limite finie que l'on notera ℓ.
   Que peut-on affirmer sur ℓ ?
4. Prouver, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+2} = \frac{4 \times 3^n}{(n+1)5^{n+1}} + \frac{n}{n+1}u_n.$$
   Que peut-on en déduire concernant la limite ℓ de la suite $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$?
5. (a) Prouver que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\text{ch}(x) \geqslant 1 + \dfrac{x^2}{2}$.
   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}^n(x) \geqslant 1 + n\dfrac{x^2}{2}$.

(c) A l'aide de ce qui précède, déterminer un encadrement de la forme $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha_n$, où α_n est le terme d'une suite que l'on calculera et exprimera en fonction de n.

(d) Prouver $\ell = 0$.

6. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:
$$I_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k \quad \text{et} \quad v_n = \int_0^{\ln(3)} \frac{1}{\operatorname{ch}^{n-1}(x)\,(1+\operatorname{ch}(x))}\mathrm{d}x.$$

(a) Soit $q \in \mathbb{R}$: simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^k$.

(b) Pour $x \in [0, \ln 3]$, simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\operatorname{ch}^k(x)}$.

(c) Exprimer I_n à l'aide de v_{n+1} et de v_0.

(d) Montrer que pour $n \geqslant 0$: $0 \leqslant v_n \leqslant u_n$.
En déduire la limite de la suite $v = (v_n)_{n\geqslant 0}$.

(e) On admet qu'il existe des constantes réelles a, b et c telles que, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$:
$\dfrac{t^2+1}{t\,(t+1)^2} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t+1} + \dfrac{c}{(t+1)^2}$. Les déterminer.

(f) Calculer v_0 à l'aide du changement de variables $t = e^x$.

(g) En déduire la valeur exacte de la limite de la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 4 `Exercice bonus - Ne le traiter que si tout le reste a été abordé.`

Recherche de l'existence de points fixes de la fonction exponentielle

1. Combien existe-t-il de solutions réelles x à l'équation « $\exp(x) = x$ » ?
2. On désire vérifier si l'équation « $\exp(z) = z$ (E) » possède au moins une solution complexe $z \in \mathbb{C}$. On cherche z sous la forme $z = x + iy$ (x, y réels), avec la condition $0 < y < \pi$.

(a) Montrer que le problème (E) est alors équivalent à la résolution de $\left\{\begin{array}{lcl} \cos(y) & = & xe^{-x} \\ y & = & \sqrt{e^{2x}-x^2} \end{array}\right.$.

(b) On définit la fonction ψ par $\psi(x) = \operatorname{Arccos}(xe^{-x}) - \sqrt{e^{2x}-x^2}$.
Déterminer, en le justifiant en détail, les signes de $\psi(0)$ et de $\psi(1)$. Conclure.