La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 COURS et APPLICATIONS DU COURS - Questions largement indépendantes

1. Sous réserve d'existence : exprimer en fonction de $\tan(a)$ et de $\tan(b)$,
$$\tan(a+b) = \dots\dots \quad \text{et} \quad \tan(a-b) = \dots\dots \quad \text{et} \quad \tan(2a) = \dots\dots$$
2. Si q est un nombre complexe et n un entier naturel, simplifier les sommes suivantes :
   (a) $1 - q + q^2 - \dots + (-1)^n q^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^k = \dots ?$
   (b) $1 + 2q^2 + 4q^4 + 8q^6 + \dots + 2^n q^{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k q^{2k} = \dots ?$
3. Rappeler la définition **et** l'expression des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité (où $n \geqslant 1$).
4. Si θ est un réel, factoriser :
$$1 + e^{i\theta} = \dots \qquad \text{et} \qquad 1 - e^{i\theta} = \dots$$
puis factoriser
$$1 + \cos(\theta) = \dots \qquad \text{et} \qquad 1 - \cos(\theta) = \dots$$
5. (a) Déterminer les racines carrées (i.e racines deuxièmes) de $\omega = -3 - 4i$.
   (b) Déterminer les racines du polynôme $Q(z) = z^2 - 4z + 7 + 4i$.
   (c) On considère le polynôme P défini par
$$P(z) = z^3 - z^2 + (-5 + 4i)z + 21 + 12i.$$
   Prouver que ce polynôme possède **une et une seule** racine réelle r.
   En déduire les valeurs des trois racines de ce polynôme P.

Exercice 2 Soit f, la fonction de la variable complexe z définie par
$$f(z) = \frac{z}{z^2+1}.$$

1. Déterminer le domaine de définition D de f (i.e la plus grande partie de $\mathbb{C}$ sur laquelle la fonction f est définie). On considère désormais $f : \left| \begin{array}{lll} D & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f(z) = \dfrac{z}{z^2+1} \end{array} \right.$
2. (a) Résoudre l'équation d'inconnue $z \in D$:
$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$
   On donnera les solutions sous forme algébrique **et** sous forme exponentielle.
   (b) L'application f est-elle injective ? Justifier.
3. (a) Soit un nombre complexe $\omega \in \mathbb{C}$: en fonction de ω, déterminer le nombre de solutions z dans E de l'équation
$$f(z) = \omega.$$
   (b) L'application f est-elle surjective ? Justifier.
4. (a) Déterminer l'ensemble $f(\mathbb{R})$.

(b) On rappelle la définition de l'image réciproque d'un sous-ensemble par une application :
« si $\varphi : E \to F$, et $A \subset F$, pour tout $x \in E \quad : \quad (x \in \varphi^{-1}(A)) \Leftrightarrow (\varphi(x) \in A)$ ».
Déterminer l'ensemble $f^{-1}(\mathbb{R})$.

5. (a) Si $z \in D$ est un complexe de module 1, prouver : $f(z)$ est un réel.
   (b) A-t-on $f(\mathbb{U} \cap D) = \mathbb{R}$? Justifier.
6. Montrer que la restriction de f à l'ensemble disque $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ (le disque ouvert, de centre O et de rayon 1) est injective.

Exercice 3 Soit la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2} = \exp(-x^2)$.

1. Etudier la fonction f : parité, dérivée, variations, limites aux bords.
   Représenter l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormal.
2. (a) Calculer $f''(x)$.
   Dresser alors le tableau de variations de la fonction f' (la dérivée de f).
   (b) En déduire[1] l'existence d'une constante C (à expliciter), avec $0 < C < 1$, telle que :
   $$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leqslant C.$$
   Que peut-on en conclure comme propriété de la fonction f ?
3. (a) Montrer que l'équation
   $$(E) \text{ « } f(x) = x \text{ »}$$
   possède, sur $\mathbb{R}$, une et une seule solution que l'on appellera α.
   (b) Justifier, sans calcul : $\alpha \in [0, 1]$.
4. On définit la suite $u = (u_n)_{n \geqslant 0}$ par :
   $$u_0 = 0 \text{ et, pour tout entier } n \geqslant 0,\ u_{n+1} = f(u_n).$$
   (a) Prouver : pour tout entier $n \geqslant 0$,
   $$|u_n - \alpha| \leqslant C^n.$$
   (b) Que peut-on déduire du résultat précédent ?
5. A l'aide de ce qui précède, **indiquer une méthode** permettant d'obtenir une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Exercice 4 Pour $p \in \mathbb{N}$, on définit $a_p = \sqrt{p} + i$ et $Z_p = \dfrac{a_p}{\overline{a_p}} = \dfrac{\sqrt{p} + i}{\sqrt{p} - i}$.

1. Dans cette question, on considère le cas $p = 3$.
   (a) Donner la forme trigonométrique de a_3.
   (b) Préciser les racines $6^{ièmes}$ de 1 et vérifier que Z_3 en est une.

1. On fournit l'encadrement de $e = \exp(1)$: $2 < e < 3$.

2. Dans cette question on suppose que $p = 4$.
   Le but de cette question est de prouver que $Z_4 = \dfrac{2+i}{2-i}$ n'est, pour aucun entier $n \in \mathbb{N}^*$, une racine $n^{\text{ième}}$ de 1.
   On va raisonner par l'absurde : on suppose donc qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(Z_4)^n = 1$.
   (a) Est-il possible que $n = 1$?
   (b) On suppose désormais $n \geqslant 2$, et on définit la somme
   $$S = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (2-i)^k (2i)^{n-k}.$$
   Simplifier S à l'aide de la formule du binôme.
   (c) En revenant à l'expression initiale de S sous forme de somme, prouver l'existence de $(A, B) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $S = (2-i) \times (A + iB)$.
   (d) Conclure.

Exercice 5 `Exercice bonus - Ne le traiter que si tout le reste a été abordé.`

Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0$, un polynôme (*unitaire*, ce qui signifie que le coefficient dominant a_n vaut 1) de degré $n \geqslant 2$, à coefficients complexes.
On note R le maximum du module de ses racines et A le maximum du module de ses coefficients autres que le coefficient dominant. Autrement dit, si α_1,...,α_n sont les racines du polynôme P :
$$R = \max(|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n|) \quad \text{et} \quad A = \max(|a_0|, \ldots, |a_{n-1}|).$$

1. (a) Montrer que, si z est une racine du polynôme P, alors on a : $|z|^n \leqslant A \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |z|^k \right)$.
   (b) En déduire : si z est une racine de P, alors : $|z| \leqslant A + 1$.
   Quelle relation peut-on en déduire entre R et A ?
2. Application : montrer que les points d'affixes les racines du polynôme
   $$Q(X) = (2+i)X^3 - 7iX^2 + (9i-2)X - 3i$$
   sont tous dans un disque de centre O et de rayon $1 + \sqrt{17}$.
   Vérification : déterminer les racines du polynôme Q sachant qu'il y en a au moins une qui est réelle, et calculer le maximum de leur module.