La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1

QUESTIONS DE COURS (**aucune preuve n'est demandée**) - APPLICATIONS DU COURS

1. Si Q est un nombre complexe et N un entier naturel, simplifier les sommes suivantes :

   (a) $1+Q+Q^2+\cdots+Q^N=\displaystyle\sum_{k=0}^{N} Q^k=\ldots ?$

   (b) $1-Q+Q^2-\cdots+(-1)^N Q^N=\displaystyle\sum_{k=0}^{N}(-1)^k Q^k=\ldots ?$

2. Rappeler précisément la formule du binôme de Newton.
3. Compléter la formule suivante (dite *formule du pion/capitaine*) : si $1 \leqslant k \leqslant n$,
$$k\binom{n}{k}=\ldots$$
4. Recopier et compléter :
$$\sum_{k=1}^{n} k=\ldots \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2=\ldots.$$
5. La suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est définie par :
$$a_1=3 \quad \text{et, pour tout } n\geqslant 1, \quad a_{n+1}=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k.$$
Montrer, pour tout $n\geqslant 1$: $a_n=3n$.

Exercice 2 Soit m un paramètre réel et f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ par
$$f_m\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y+(m+1)\,z\\ 2x+3y-mz\\ 2x+my+(6+3m)z\end{pmatrix}.$$
On s'intéresse à l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité et à l'ensemble image de f_m. Ainsi si l'on demande ce que l'on peut déduire d'un résultat et/ou calcul pour f_m, on attend une réponse relative à ces questions.

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $m=0$.

   (a) Calculer $f_0\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ -1\end{pmatrix}$ et $f_0\begin{pmatrix} -2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$, que peut-on en déduire pour f_0 ?

   (b) Résoudre le système $f_0\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$, que peut-on en déduire pour f_0 ?

   (c) A quelle condition sur $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, le système $f_0\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ admet-il au moins une solution ? Que peut-on en déduire pour f_0 ?

2. On se place dans le cas général où $m\in\mathbb{R}$ est quelconque.

   (a) Pour $m\notin\{0,1\}$, montrer que pour tout $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ l'équation $f_m\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ admet toujours une unique solution. Que peut-on en déduire pour f_m ?

   (b) Que dire de f_1 ?

Exercice 3

I - Une formule et ses applications

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$, deux suites réelles.

1. (a) Pour $k \in \mathbb{N}$, développer $u_k\left(v_{k+1}-v_k\right)+\left(u_{k+1}-u_k\right)v_{k+1}$.

   (b) En déduire, pour tout $n \geqslant 1$:
$$\sum_{k=1}^{n} u_k\left(v_{k+1}-v_k\right)=u_{n+1}v_{n+1}-u_1v_1-\sum_{k=1}^{n}\left(u_{k+1}-u_k\right)v_{k+1} \qquad (*).$$

2. En appliquant $(*)$ à $u_k=k^2$ et $v_k=k-1$, **retrouver** l'expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ en fonction de n.

3. En appliquant $(*)$ à $u_k=2^k$ et $v_k=k-1$, donner une expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$ en fonction de n.

4. Le retour des sommes harmoniques... Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

   (a) Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0=0$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$, $v_{k+1}-v_k=k$.
   Déterminer v_{n+1} en fonction de n.

   (b) Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kH_k$ en fonction de n et de H_{n+1}.

II - Sommes harmoniques et coefficients binomiaux

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k}x^k.$$

1. Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$1-xf'(x)=(1-x)^n,$$
   puis $f'(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(1-x)^k$.

2. En déduire $f(1)=H_n$ i.e $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k}=H_n$.

3. <u>Une application</u>

   (a) Montrer que, si $0\leqslant i\leqslant k\leqslant n$:
$$\binom{n}{k}\binom{k}{i}=\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}.$$

   (b) En déduire :
$$\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}H_k.$$

III - Une somme double

1. (a) Exprimer $D_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{i}$ à l'aide de H_n et de n.

   (b) Montrer également : $D_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} H_k$.

2. Justifier l'égalité : $H_{n+1} = 1 + \left(\dfrac{H_n + H_{n-1} + \cdots + H_1}{n+1} \right)$.

3. Une application : on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma = \displaystyle\sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{j-i}$.

   Justifier l'existence de σ, et l'exprimer uniquement en fonction de n et de H_n.

Exercice 4

On considère la suite réelle F définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

Pour x dans $\mathbb{R}$ et n dans $\mathbb{N}$, on note

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} F_k x^k.$$

1. Montrer directement, sans récurrence mais avec des changements d'indices, que pour tout entier $n \geqslant 2$ et pour tout x dans $\mathbb{R}$:
$$(1 - x - x^2) S_n(x) = x - F_{n+1} x^{n+1} - F_n x^{n+2}.$$
2. Montrer que l'équation « $x^2 - x - 1 = 0$ » admet deux solutions réelles dont une seule est strictement positive, que l'on notera φ. Vérifier que l'autre racine vaut $1 - \varphi = -\dfrac{1}{\varphi}$.
3. Montrer, en rédigeant une récurrence double, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - (1 - \varphi)^n \right).$$
4. On fixe un réel x dans l'intervalle $\left] -\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi} \right[$.

   (a) Montrer que la suite $(F_n x^n)_{n \geqslant 0}$ converge vers 0.

   (b) En déduire que la suite $(S_n(x))_{n \geqslant 0}$ converge et préciser sa limite $\ell(x)$ en fonction de x.

   (c) L'application
$$\ell : \left| \begin{array}{rcl} \left] -\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi} \right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ell(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} (S_n(x)) \end{array} \right.$$
   est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Préciser son image $\mathrm{Im}(\ell)$.