

La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

PROBLEME 1

Une puce se déplace à chaque unité de temps sur les quatre sommets, nommés A , B , C et D , d'un carré selon le protocole suivant :

- A l'instant 0, la puce se trouve sur le sommet A
- Si à l'instant $n \geq 0$ la puce se trouve sur le sommet A , elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet A avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et sur le sommet C avec la probabilité $\frac{1}{3}$.
- Si à l'instant $n \geq 0$ la puce se trouve sur le sommet B , elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet A avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et sur le sommet C avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- Si à l'instant $n \geq 0$ la puce se trouve sur le sommet C , elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet B avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et sur le sommet D avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- Si à l'instant $n \geq 0$ la puce se trouve sur le sommet D , elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet B avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et sur le sommet D avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

Pour tout entier naturel n , On note les événements

- A_n = « la puce est sur le sommet A à l'instant n »
- B_n = « la puce est sur le sommet B à l'instant n »
- C_n = « la puce est sur le sommet C à l'instant n »
- D_n = « la puce est sur le sommet D à l'instant n »

1. (a) Préciser les valeurs de $\mathbb{P}(A_0)$, $\mathbb{P}(B_0)$, $\mathbb{P}(C_0)$ et $\mathbb{P}(D_0)$. Justifier.
 (b) Rappeler l'énoncé de la **formule des probabilités totales** (hypothèses comprises).
 (c) Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \frac{2}{3}\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(B_n).$$
 (d) Exprimer de même, pour tout entier $n \geq 0$, $\mathbb{P}(B_{n+1})$, $\mathbb{P}(C_{n+1})$ et $\mathbb{P}(D_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(A_n)$, $\mathbb{P}(B_n)$, $\mathbb{P}(C_n)$ et $\mathbb{P}(D_n)$.
 (e) Que vaut, pour tout n de $\mathbb{N}$, la somme $\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}(D_n)$?
2. On pose $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_n) \\ \mathbb{P}(B_n) \\ \mathbb{P}(C_n) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On pose également :

$$R = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad V = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

Quelle relation existe-t-il entre U_{n+1} , U_n , R et V ?

3. (a) Déterminer une matrice $L \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $L = RL + V$.
 (b) Etablir la relation suivante, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $U_n = R^n(U_0 - L) + L$.
4. On pose $M = 6R$ et on appelle f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice M . La base canonique de $\mathbb{R}^3$ sera notée $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, Id représente l'application identité de $\mathbb{R}^3$ et I_3 la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- (a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $Q_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_3)$.
Montrer que Q est un polynôme de degré trois, possédant trois racines réelles, à déterminer, λ_1 , λ_2 et λ_3 avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
- (b) Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, calculer le rang de la matrice $M - \lambda_k I_3$, puis montrer que le noyau $E_{\lambda_k} = \text{Ker}(f - \lambda_k \text{Id})$ est une droite vectorielle dont on précisera un vecteur directeur $\vec{b}_k$: on choisira $\vec{b}_k$ composé uniquement de valeurs entières avec sa première composante la plus petite possible à choisir dans $\{1, 3\}$.
- (c) Prouver que la famille $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et préciser la matrice Δ de f sur cette base $\mathcal{B}$.
- (d) Quelle relation existe t-il entre les matrices M et Δ ?
5. Indiquer une méthode de calcul de R^n (dont on ne demande pas une expression détaillée).
6. En déduire la limite de la colonne U_n (i.e de chacune des composantes de la colonne U_n) lorsque n tend vers $+\infty$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(D_n)$.
Si l'on décide d'écraser cette puce, où vaut-il mieux frapper ?

PROBLEME 2**I - Questions préliminaires**

On considère la fonction f définie par

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t) = \frac{1}{1+t^2} \end{cases}.$$

- Effectuer une étude rapide et tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f .
- Justifier que le segment $[0, 1]$ est stable par f .
- Etudier les variations de la fonction dérivée f' sur $[0, 1]$.
- Déterminer toutes les primitives de f .
- Donner les développements limités d'ordre 5 en 0 des fonctions f et $\arctan$.

II - Etude des solutions d'une équation différentielle

On considère, sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$, l'équation différentielle suivante :

$$\ll xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2} \gg \quad (E)$$

- Déterminer toutes les solutions sur I de cette équation différentielle (E) .
- Prouver que, parmi toutes ces solutions, il en existe une et une seule qui soit prolongeable par continuité en 0. On appelle g cette solution unique.
- Cette fonction g est-elle dérivable en 0 ? Si oui, donner la valeur de $g'(0)$ et tracer l'allure locale de cette fonction au voisinage de 0^+ (tangente éventuelle en 0 et position par rapport à cette tangente).

III - Une suite récurrente

1. Prouver que l'équation « $x^3 + x - 1 = 0$ » possède une et une seule solution réelle, notée α .
Prouver $0 < \alpha < 1$.
2. (a) Vérifier que α est un point fixe de la fonction f .
(b) Rappeler l'énoncé du théorème de l'*inégalité des accroissements finis* (hypothèses et conclusion).
(c) Montrer que f est C -lipschitzienne sur l'intervalle $[0, 1]$ où C est une constante vérifiant $0 < C < 1$.
3. On définit la suite $u = (u_n)_{n \geq 0}$ par :

$$u_0 = 0 \text{ et, pour tout entier } n \geq 0, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{1 + u_n^2}.$$

- (a) Montrer : pour tout entier $n \geq 0$, $u_n \in [0, 1]$.
 - (b) Montrer : pour tout entier $n \geq 0$,
 $|u_n - \alpha| \leq C^n$.
 - (c) Que peut-on conclure du résultat précédent ?
4. A l'aide de ce qui précède, indiquer une méthode permettant d'obtenir une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

IV - Dérivées successives

1. Justifier que la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n à coefficients réels tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1 + x^2)^{n+1}}.$$

Au passage, on aura établi une relation entre les polynômes P_{n+1} , P'_n et P_n .
3. Question de cours : rappeler l'énoncé (complet, hypothèses comprises) du théorème établissant la formule de Leibniz.
4. (a) Justifier : $\forall x \in \mathbb{R}, (1 + x^2)f(x) = 1$.
En déduire, pour tout $n \geq 2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$P_n(x) + 2nxP_{n-1}(x) + n(n-1)(1 + x^2)P_{n-2}(x) = 0.$$

(b) Une application : prouver que, pour tout $n \geq 0$, les polynômes P_n et P_{n+1} n'ont aucune racine réelle commune.
5. Dans cette question, on détermine les polynômes P_n par une méthode différente.

- (a) Déterminer des constantes λ et μ dans $\mathbb{C}$ telles que :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1 + x^2} = \frac{\lambda}{x - i} + \frac{\mu}{x + i}.$$

- (b) Etablir alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2i} \left(\frac{(x + i)^{n+1} - (x - i)^{n+1}}{(x^2 + 1)^{n+1}} \right).$$

- (c) En déduire une expression explicite de $P_n(x)$.
- (d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n possède exactement n racines réelles distinctes, qui sont les

$$\cotan \left(\frac{k\pi}{n+1} \right) \text{ avec } 1 \leq k \leq n.$$

V - Une équation fonctionnelle

On cherche les fonctions h solutions du problème ($\mathcal{P}$)

« $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, fonction **dérivable** sur $\mathbb{R}$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $h(x+y)(1-h(x)h(y)) = h(x) + h(y)$ ».

1. Dans cette question, on suppose que h est une solution de ($\mathcal{P}$).

(a) Montrer : $h(0) = 0$.

(b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{h'(x)}{1+h^2(x)} = h'(0)$.

(c) Montrer qu'il existe deux constantes a et b telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan(h(x)) = ax + b$.

(d) En déduire que h est constante.

2. Conclure.

VI - Calcul de la somme d'une série

Soit la suite $S = (S_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$\forall n \geq 0, S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

1. (a) On définit deux nouvelles suites $p = (p_n)_{n \geq 0}$ et $i = (i_n)_{n \geq 0}$ par
pour tout $n \geq 0$, $p_n = S_{2n}$ et $i_n = S_{2n+1}$.

Montrer que $p = (p_n)_{n \geq 0}$ et $i = (i_n)_{n \geq 0}$ sont des suites adjacentes.

(b) Montrer que la suite S converge. On note L sa limite.

(c) Indiquer une méthode permettant d'obtenir une valeur approchée de L à 10^{-2} près.

2. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n}.$$

Exprimer $D_n(x)$ à l'aide de $f(x)$.

3. En calculant $\int_0^1 D_n(x) dx$ de deux façons, montrer :

$$\text{pour } n \geq 0, \left| S_n - \frac{\pi}{4} \right| \leq \frac{1}{2n+3}.$$

Conclusion ?