La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1

1. Déterminer le quotient et le reste dans la division euclidienne du polynôme X^2 par $X+1$.
2. Trouver un équivalent, lorsque $n \to +\infty$ de :
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{k+n}.$$
3. (a) Justifier : pour tout $p \in \mathbb{N}$, $p^4 + 1 \leqslant (p^2+1)^2$.

   (b) En déduire un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de :
$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k^4+1}}{k+n}.$$

Exercice 2

Soit φ définie par $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+t^4}}$ et f par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.
On ne cherchera pas, dans un premier temps, à calculer explicitement l'expression de $f(x)$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. A l'aide d'un changement de variable simple, montrer que f a une parité intéressante.

   On peut donc restreindre l'étude de f à $[0,+\infty[$: on supposera désormais $x > 0$.

3. Prolongement en $x = 0$.

   (a) Montrer : $\ln(2) - f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}\left(1+\sqrt{1+t^2}\right)}$

   Indication : que vaut $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t}$?

   (b) En déduire : $0 \leqslant \ln(2) - f(x) \leqslant \dfrac{x}{2}$.

   (c) Peut-on prolonger f par continuité en $x = 0^+$ (i.e par continuité à droite en 0) ? Et en $x = 0$?

4. Dérivée

   (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.

   (b) A l'aide du théorème `limite de la dérivée` (dont on vérifiera les hypothèses), montrer que l'on peut prolonger f en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

5. Après avoir étudié la monotonie de φ, montrer :
$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$
   Un dessin sera fortement apprécié.

6. Donner le tableau de variations de f (limites aux bords comprises) et l'allure de son graphe sur $\mathbb{R}$.
7. Question bonus : avez-vous des idées pour calculer explicitement $f(x)$ ou, ce qui revient au même, pour calculer une primitive de φ sur $]0, +\infty[$?

PROBLEME

But : dans ce problème, on désire démontrer que, pour tout endomorphisme f d'un espace vectoriel E de **dimension finie** $n \geqslant 1$, il existe un entier $1 \leqslant k \leqslant n$ tel que $\mathrm{Ker}(f^k) \oplus \mathrm{Im}(f^k) = E$.

I : un premier exemple simple

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) = (4x - y + 5z, -2x - y - z, -4x + y - 5z) \end{array} \right. .$$

1. Déterminer le noyau de f (équations, base, dimension).
2. En déduire l'image de f (équations, base, dimension) : a-t-on $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$?
3. Déterminer l'expression analytique de f^2, puis son noyau et son image (équations, bases, dimensions) : a-t-on $\mathrm{Ker}(f^2) \oplus \mathrm{Im}(f^2) = E$?

II : des résultats généraux intéressants

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de **dimension quelconque** (finie ou infinie). Soit f un endomorphisme de E.
Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on définit le noyau $N_k = \mathrm{Ker}(f^k)$ et l'image $I_k = \mathrm{Im}(f^k)$.

1. Démontrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a les inclusions : $N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$.
2. On **suppose** qu'il existe un entier k tel que $N_k = N_{k+1}$: montrer qu'alors $N_{k+1} = N_{k+2}$.

III : résolution du problème posé

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de **dimension** $n \geqslant 1$, et f un endomorphisme de E. On reprend les notations de la partie précédente.

1. Montrer qu'il existe nécessairement un entier $k \geqslant 1$ tel que $N_k = N_{k+1}$.
   On note p le plus petit entier $k \geqslant 1$ vérifiant cette propriété.
2. Justifier que p existe et que $p \leqslant n$: on le nomme **indice de l'endomorphisme** f.
3. Démontrer que, pour tout $k \geqslant p$, on a $N_k = N_p$.
4. En déduire que $E = \mathrm{Ker}(f^p) \oplus \mathrm{Im}(f^p)$.

IV : quelques exemples généraux

Dans cette partie, E désigne toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de **dimension** $n \geqslant 1$, et f un endomorphisme de E.

1. Si $f = 0$, que vaut l'indice de l'endomorphisme f ? Justifier.
2. Si f est un automorphisme de E, que vaut l'indice de f ? Justifier.
3. Si f est un projecteur de E différent de l'identité, justifier que f n'est pas bijectif et trouver son indice.
4. Soit f un endomorphisme nilpotent de E : on rappelle que cela signifie qu'il existe un entier $r \geqslant 1$ tel que $f^r = 0$. On appelle alors *indice de nilpotence* de f le plus petit des entiers $k \geqslant 1$ vérifiant $f^k = 0$.
   (a) Justifier l'existence de l'entier i, **indice de nilpotence** de f.
   Cet entier vérifie donc : $f^{i-1} \neq 0$ et $f^i = 0$.
   (b) Montrer que i est également l'*indice* de l'endomorphisme f. On vient donc de prouver que, pour un endomorphisme nilpotent, son *indice* est son *indice de nilpotence*.
5. A l'aide du résultat de la question précédente, montrer que si f est un endomorphisme quelconque de E tel que $f^n \neq 0$, alors f n'est pas un endomorphisme nilpotent.

V : un exemple polynomial

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{K}_n[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et de degré inférieur ou égal à n. On définit, pour tout $P \in E$, $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. (a) Montrer que Δ est un endomorphisme de l'espace E.
   (b) Déterminer le noyau de Δ.
   (c) Justifier l'inclusion $\mathrm{Im}(\Delta) \subset \mathbb{K}_{n-1}[X]$. En déduire l'image de l'endomorphisme Δ.
   (d) Que peut-on déjà en déduire concernant l'indice de Δ ?
2. On définit la famille de polynômes $\mathcal{F} = (P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n)$ par
$$P_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1, \ldots, n\},\ P_k = \frac{1}{k!} X(X-1)(X-2)\ldots(X-k+1) = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(X-i).$$
   (a) Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est une base de E.
   (b) Qui est $\Delta(P_0)$? Puis vérifier que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\Delta(P_k) = P_{k-1}$.
   (c) En déduire, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, une expression simple de $\Delta^i(P_j)$.
3. Déduire, des résultats précédents, que Δ est un endomorphisme nilpotent de E.
   Que vaut son indice ?
4. QUESTION FACULTATIVE : dans cette question, on cherche les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ qui ne prennent que des valeurs entières sur les entiers. Autrement dit, on cherche les polynômes $Q \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant : $\forall j \in \mathbb{Z}$, $Q(j) \in \mathbb{Z}$.

(a) Donner un exemple de polynôme de $\mathbb{C}[X]$, à coefficients non tous entiers et qui vérifie cette propriété, et un polynôme à coefficients tous non entiers.

(b) Justifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, P_k est solution du problème. En déduire d'autres solutions.

(c) Soit Q, un polynôme solution : on suppose $Q \in \mathbb{C}_n[X]$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On appelle $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ses coordonnées sur la base $\mathcal{F} = (P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n)$. Déterminer des relations entre ces coordonnées, puis en déduire qu'elles sont toutes entières.

(d) Conclure.

VI : un exemple à paramètre

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ défini par (où m désigne un paramètre réel)

$$f_m : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & f_m(x,y,z,t) = (mx+y+mz, y+mz+t, x+y+mz, y) \end{array} \right. .$$

1. Montrer : (f_m est un automorphisme de $\mathbb{R}^4$) $\Longleftrightarrow$ ($m \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$).
2. Que vaut l'indice de f_m si $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$?
3. Que vaut l'indice de f_1 ? Que vaut l'indice de f_0 ?

VII : cas de la dimension infinie

Si $E = \mathbb{K}[X]$ et d, l'endomorphisme dérivation de E défini par $d(P) = P'$, prouver qu'il n'existe pas d'entier $k \geqslant 1$ tel que $\mathrm{Ker}(d^k) \oplus \mathrm{Im}(d^k) = E$.