Exercice 1 «$\mathrm{DL}_n(a)$» signifie «développement limité d'ordre n au point a».

1. Donner le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto g(x) = \sqrt{1 + \mathrm{sh}\,(x)}$.
2. Donner le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto h(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(x)}{1 + e^x}$.
3. Pour tout paramètre k réel, on définit la fonction f_k par : $f_k\,(x) = g\,(x) + kh\,(x)$.
   (a) Préciser D_{f_k}, l'ensemble de définition de la fonction f_k.
   (b) Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de f_k.
   (c) Donner un équivalent simple de $f_k(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
4. On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de f_k dans un repère orthonormé.
   (a) Donner une équation de T_k, tangente à $\mathcal{C}_k$ au point d'abscisse 0.
   (b) Montrer que, pour k parcourant $\mathbb{R}$, toutes les droites T_k sont concourantes en un point dont on déterminera les coordonnées.
5. Déterminer, en fonction de k, la position locale au voisinage de 0 de $\mathcal{C}_k$ et T_k : illustrer ces différentes situations par des schémas clairs.
6. (a) Déterminer les primitives de la fonction h.
   (b) Existe-t-il $k \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x = 0$?
7. On définit la fonction φ_k par $\varphi_k(x) = \dfrac{f_k(x)}{x}$.
   Montrer qu'il existe une seule valeur de k permettant de prolonger φ_k par continuité en 0 : on appelle désormais ψ cette fonction φ_k ainsi prolongée en 0. Justifier que la fonction ψ est dérivable en 0, donner la valeur de $\psi\,'(0)$ et tracer l'allure de la courbe représentative de ψ avec sa tangente au voisinage de 0.
8. On définit la fonction α_k par
   $$\alpha_k : x \mapsto \alpha_k(x) = e^{2x} + k\ln(1 - x).$$
   Existe-t-il une valeur de k pour laquelle la courbe représentative de α_k possède un point d'inflexion en $x = 0$?

Exercice 2 Pour tout entier $n \geqslant 3$, on considère l'équation
$$(E_n) : e^x = x^n,$$
où l'inconnue x désigne un **réel strictement positif**.

1. Montrer que l'équation (E_n) est équivalente à l'équation :
   $$x = n\ln(x).$$
   On définit donc la fonction f_n par, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f_n(x) = x - n\ln(x)$.
2. Etudier la fonction f_n (tableau de variations, limites aux bords).
3. Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, l'équation (E_n) possède, sur l'intervalle $]0, n]$, une et une seule racine que l'on notera u_n.

4. (a) Pour $n \geqslant 3$: quel est le signe de $f_{n+1}(u_n)$?

   (b) En déduire[1] la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ puis que cette suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ converge. On note ℓ sa limite : quelle est sa valeur ?

5. On pose $\varepsilon_n = u_n - \ell$.

   (a) Montrer qu'il existe une constante a non nulle telle qu'on ait l'équivalent suivant :
   $$\varepsilon_n \sim \frac{a}{n}.$$
   Conclusion : on a ainsi obtenu le développement asymptotique (à deux termes)
   $$u_n = \ell + \frac{a}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right).$$

   (b) Montrer qu'il existe une constante b telle qu'on ait le développement suivant :
   $$u_n = \ell + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \circ\left(\frac{1}{n}\right).$$
   C'est un développement asymptotique à trois termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$.

6. (a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, l'équation (E_n) possède une et une seule solution sur l'intervalle $[n, +\infty[$. On notera v_n cette solution.

   (b) Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$?

   (c) Prouver l'équivalent : $\ln(v_n) \sim \ln(n)$.

   (d) En déduire un équivalent simple de la suite (v_n).

1. Indication : quelle est la monotonie de la fonction f_{n+1} sur l'intervalle $[0, n+1]$? Que vaut $f_{n+1}(u_{n+1})$?