**Exercice 1**

1. Question de cours : si $f$ est une fonction dérivable sur un intervalle $I$, et $a \in I$ : rappeler une équation cartésienne de la droite tangente, au point d'abscisse $a$, à la courbe représentative de $f$ (dans un repère orthonormé).

2. Pour tout $k$ réel, on considère la fonction $f_k$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f_k(x) = e^x + (2k-1)e^{-x}.$$
   (a) Montrer que, pour tout réel $m$, il existe une et une seule fonction $f_k$ vérifiant l'égalité :
   $$f_k(\ln 2) = m.$$
   On note désormais $g_m$ cette fonction, et $\Gamma_m$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal. Ainsi, $\Gamma_m$ contient le point $A_m$ de coordonnées $(\ln 2, m)$.
   Donner l'expression de $g_m(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Donner une équation cartésienne de la tangente $T_m$ à la courbe $\Gamma_m$ au point $A_m$.

   (c) Montrer que toutes les droites $T_m$, lorsque $m$ parcourt $\mathbb{R}$, sont concourantes en un point $B$ dont on précisera les coordonnées.

3. (a) En fonction du réel $k \in \mathbb{R}$, déterminer le signe de $f_k(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Déterminer les fonctions $f_k$ qui possèdent au moins une tangente parallèle à la droite d'équation «$y = x$».

**Exercice 2** On pose $f(x) = \text{Arccos}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) + 2\text{Arctan}(x)$.

1. Déterminer l'ensemble $D_f$ de définition de la fonction $f$.
2. Préciser les valeurs de $f(0)$, $f(1)$, $f(\sqrt{3})$, $f(-1)$, $f(-\sqrt{3})$.
3. Pour quelles valeurs de $x$ peut-on calculer $f'(x)$ (**justifier**) ? Faire ce calcul dans ce cas.
4. Justifier que $f$ est constante sur l'intervalle $[-1, +1]$.
5. Démontrer que, pour $x \in [+1, +\infty[$, $f(x) = -\frac{\pi}{2} + 4\text{Arctan}(x)$.
6. Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f(-x)$ à l'aide de $f(x)$. En déduire directement, mais en détaillant le raisonnement, une expression de $f(x)$ lorsque $x \in ]-\infty, -1]$.
7. Tracer l'allure de la courbe représentative de $f$ (sur $D_f$).
8. Dans cette question, on désire retrouver l'expression de $f$ en passant par une autre méthode (à l'aide d'un changement de variable).

   (a) Rappels de cours
   - Si $b = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$, rappeler les expressions de $\sin(a)$, $\cos(a)$ et $\tan(a)$ en fonction de $b$.
   - Compléter :

     ♡ $(\text{Arcsin}(\sin(t)) = t) \Leftrightarrow (t \in \ldots\ldots)$
     ♡ $(\text{Arccos}(\cos(t)) = t) \Leftrightarrow (t \in \ldots\ldots)$
     ♡ $(\text{Arctan}(\tan(t)) = t) \Leftrightarrow (t \in \ldots\ldots)$
     ♡ $\forall x \in \ldots\ldots$, $\text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x) = \ldots\ldots$

   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, justifier l'existence et l'unicité d'un réel $t \in ]-\pi, \pi[$ tel que $x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.

   (c) Si $x \in [-1, +1]$ : préciser dans quel intervalle se situe $\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$.
   Simplifier, dans ce cas, l'expression de $f(x)$.

(d) Si $x \in ]+1, +\infty[$ : préciser dans quel intervalle se situe $(\pi - t)$.
Simplifier, dans ce cas, l'expression de $f(x)$.

(e) Si $x \in ]-\infty, -1[$ : préciser dans quel intervalle se situe $(-\pi - t)$.
Simplifier, dans ce cas, l'expression de $f(x)$.

**Exercice 3** Soit $p$ un **nombre impair** tel que $p \geqslant 3$.

Le but de ce problème est de prouver que

$$\frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{1}{p}\right) \notin \mathbb{Q} \quad \text{i.e} \quad \frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{1}{p}\right) \text{ est un nombre irrationnel.}$$

Pour cela, on raisonne par l'absurde.

On suppose donc qu'il existe des entiers $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{a}{b}.$$

1. (a) Montrer : $\dfrac{1}{\pi}\arccos\left(\dfrac{1}{2}\right) \in \mathbb{Q}$.
   (b) Montrer : $\dfrac{1}{\pi}\arccos\left(\dfrac{1}{p}\right) \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.
2. Simplifier $\cos\left(b\arccos\left(\dfrac{1}{p}\right)\right)$.
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \cos\left(n\arccos\left(\dfrac{1}{p}\right)\right)$.
   (a) Calculer $u_0$, $u_1$ et $u_2$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
   $$u_{n+2} + u_n = \frac{2}{p}u_{n+1}.$$
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = p^n u_n$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
   $$v_{n+2} = 2v_{n+1} - p^2 v_n.$$
   (b) Calculer $v_0$, $v_1$, $v_2$ et $v_3$.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $v_n \in \mathbb{Z}$.
   (d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $p \mid (v_n - 2^{n-1})$ i.e « $p$ divise $(v_n - 2^{n-1})$ ».
   (e) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $|u_n| \neq 1$.
5. Conclure.