Exercice 1

1. Déterminer les racines carrées de $\omega = -8 - 6i$.
2. On considère le polynôme P défini par
$$P(X) = X^3 - (4+i)X^2 + 5(1+i)X - 6(1+i).$$
   (a) Prouver que ce polynôme P admet une et une seule racine **réelle** r, et la déterminer.
   (b) Déterminer le polynôme Q tel que : $P(X) = (X - r)Q(X)$.
   (c) Déterminer toutes les racines de P.

Exercice 2

Soit f, la fonction de la variable complexe z définie par
$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 2z + 2}.$$

1. Déterminer le domaine de définition E de f (i.e la plus grande partie de $\mathbb{C}$ sur laquelle la fonction f est définie). Ainsi, $f : \left| \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 2z + 2} \end{array} \right.$
2. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
   (a) Que vaut $1 + j + j^2$?
   (b) Calculer et simplifier $f(j)$.
   (c) Résoudre l'équation « $f(z) = -j^2$ », et exprimer les solutions z à l'aide de j.
3. (a) Résoudre l'équation d'inconnue $z \in E$: « $f(z) = \dfrac{1}{4}$ ».
   On donnera les solutions sous forme algébrique **et** sous forme exponentielle.
   (b) L'application f est-elle injective ?
4. (a) Soit un nombre complexe $\omega \in \mathbb{C}$: en fonction de ω, déterminer le nombre de solutions z dans E de l'équation « $f(z) = \omega$ ».
   (b) L'application f est-elle surjective ?
5. A quelle condition a-t-on $f(z) \in \mathbb{R}$?
   Quel ensemble a-t-on ainsi déterminé : $f(\mathbb{R})$ ou $f^{-1}(\mathbb{R})$?

Exercice 3 Soit un entier $n \geqslant 2$, on pose
$$z_n = e^{\frac{2i\pi}{n}} \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} z_n^{(k^2)}.$$

L'objectif de cet exercice est de calculer $|S_n|$.

1. (a) Donner les valeurs de z_n^n et de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z_n^k$.
   (b) Montrer : $|S_n| \leqslant n$.
2. (a) Calculer S_2 et $|S_2|$.
   (b) Calculer S_3 et $|S_3|$.
   (c) Calculer S_4 et $|S_4|$.

3. Dans cette question, on cherche à calculer $|S_5|$.
   (a) Montrer : $S_5 = 1 + 4\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.
   (b) Justifier : $1 + \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\dfrac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\dfrac{8\pi}{5}\right) = 0$.
   (c) En déduire : $1 + 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = 0$.
   (d) Montrer alors que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est racine d'une équation du second degré que l'on précisera, et en déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
   (e) Enfin, calculer les valeurs de S_5 et $|S_5|$.
4. Dans cette question, on cherche à calculer $|S_7|$.
   (a) Montrer : $S_7 = 1 + 2\left(z_7 + z_7^2 + z_7^4\right)$ et $\overline{S_7} = 1 + 2\left(z_7^3 + z_7^5 + z_7^6\right)$.
   (b) En déduire la valeur de $S_7 \times \overline{S_7}$, puis celle de $|S_7|$.
5. On s'intéresse maintenant au cas général.
   (a) Soit un entier $j \in \mathbb{Z}$ (donc **pas** le $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$...), montrer
   $$\sum_{k=0}^{n-1} z_n^{kj} = \begin{cases} n & \text{si } n \,|\, j \text{ i.e si } n \text{ divise } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$
   (b) Montrer : $|S_n|^2 = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1} z_n^{(\ell^2 - j^2)}$.
   (c) Soit $j \in \mathbb{Z}$ et $\ell \in \mathbb{Z}$, montrer
   $$\sum_{k=\ell+1}^{\ell+n} z_n^{(-2kj+k^2)} - \sum_{k=\ell}^{\ell+n-1} z_n^{(-2kj+k^2)} = 0$$
   puis en déduire :
   $$\forall j \in \mathbb{Z},\ \forall \ell \in \mathbb{Z},\quad \sum_{k=\ell}^{\ell+n-1} z_n^{(-2kj+k^2)} = \sum_{k=0}^{n-1} z_n^{(-2kj+k^2)}.$$
   (d) Montrer :
   $$|S_n|^2 = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} z_n^{(-2kj+k^2)}.$$
   (e) Enfin, prouver que, si n est impair :
   $$|S_n| = \sqrt{n}.$$
   (f) Quelle est la valeur de $|S_n|$ lorsque n est pair ?