Exercice 1 Soit m un paramètre réel et f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ par

$$f_m\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+mz \\ x-y-mz \\ 2x+my+mz \end{pmatrix}$$

On s'intéresse à l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité et à l'espace image de f_m. Ainsi si l'on demande ce que l'on peut déduire d'un résultat et/ou calcul pour f_m, on attend une réponse relative à ces questions.

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $m = 1$.
   (a) Calculer $f_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $f_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, que peut-on en déduire pour f_1 ?
   (b) Résoudre le système $f_1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, que peut-on en déduire pour f_1 ?
   (c) A quelle condition sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, le système $f_1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet-il au moins une solution ? Que peut-on en déduire pour f_1 ?
2. On se place dans le cas général où $m \in \mathbb{R}$ est quelconque.
   (a) Pour $m \notin \{0, 1\}$, montrer que pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ l'équation $f_m\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet toujours une unique solution. Que peut-on en déduire pour f_m ?
   (b) Pour $m = 2$ déterminer $f_2^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ en fonction de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
   (c) Que dire de f_0 ?

Exercice 2 On considère le triangle numérique suivant, où chaque nombre est obtenu en additionnant les deux nombres de la ligne supérieure entre lesquels il est placé :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & \dots \\
& 1 & & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & & \dots & \\
& & 4 & & 8 & & 12 & & 16 & & \dots & & \\
& & & 12 & & 20 & & 28 & & \dots & & & \\
& & & & 32 & & 48 & & \dots & & & & \\
& & & & & 80 & & \dots & & & & & \\
& & & & & & \dots & & & & & &
\end{array}$$

1. Calculer le nombre inscrit à la pointe (c'est-à-dire «tout en bas») du triangle d'ordre 7, c'est-à-dire du triangle dont la première ligne est
   $$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7$$
2. On rappelle la définition des coefficients binomiaux : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$,
   $$\boxed{\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k! \times (n-k)!} & \text{si } \ 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{si } \ k < 0 \text{ ou } k > n \end{cases}}.$$
   Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer la somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres complexes. On construit selon le modèle précédent le triangle numérique d'ordre n obtenu en mettant sur la première ligne les nombres
   $$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n$$
   Pour tout $i \in [[0, n]]$ et $j \in [[0, n-i]]$, on note
   $$x_j^{(i)} \text{ le } j^{\text{ième}} \text{ nombre de la } i^{\text{ième}} \text{ ligne (en commençant la numérotation à 0).}$$
   Ainsi $x_0^{(0)} = a_0$, $x_1^{(0)} = a_1$, $x_0^{(1)} = a_0 + a_1$, etc
   Le nombre inscrit à la pointe du triangle d'ordre n est donc $x_0^{(n)}$.
   (a) Soit $i \in [[0, n]]$ et $j \in [[0, n-i-1]]$.
   A l'aide de la formule de Pascal et d'un changement de variable, montrer l'égalité :
   $$\sum_{k=0}^{i+1}\binom{i+1}{k}a_{k+j} = \sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}a_{k+j} + \sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}a_{k+j+1}.$$

(b) Quelle relation a-t-on entre les nombres $x_j^{(i+1)}$, $x_j^{(i)}$ et $x_{j+1}^{(i)}$?

(c) Montrer alors, à l'aide d'une récurrence finie (i.e limitée) sur $i \in [[0, n]]$:

$$\forall j \in [[0, n-i]], \qquad x_j^{(i)} = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} a_{k+j}.$$

4. <u>Première application</u>

(a) Que vaut la valeur du nombre inscrit à la pointe du triangle d'ordre n construit sur le schéma de la première question ?

(b) Avec cette construction, déterminer, en introduisant astucieusement une somme double, la valeur de la somme de toutes les pointes successives des triangles d'ordre $0, 1, \ldots, n$ i.e déterminer $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_0^{(i)}$.

5. <u>Seconde application</u>

On revient au cas général. Pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose, pour tout $j \in [[0, n]]$: $x_j^{(0)} = t^j$.

(a) Déterminer, dans ce cas, la valeur de la somme de toutes les pointes successives.

(b) En passant par une somme double et en utilisant les coefficients d'un certain polynôme, montrer que le résultat précédent permet de prouver la formule suivante, où $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

(c) Montrer que la formule précédente se retrouve facilement
– à l'aide d'une somme télescopique.
– à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Exercice 3 Soit n et p, deux entiers naturels. On pose :

$$S_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^p.$$

On étudie ici quelques propriétés de certaines sommes $S_{n,p}$.

1. <u>Cas $p = 0$</u>

(a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $S_{n,0} = 0$.

(b) Que vaut $S_{0,0}$?

2. <u>Cas $p = 1$</u>. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^k$.

(a) Simplifier l'expression de $f(x)$ à l'aide de la formule du binôme.

(b) Donner deux expressions différentes du nombre dérivé $f'(x)$.

(c) En déduire la valeur de $S_{1,1}$ puis celle de $S_{n,1}$ pour tout entier $n > 1$.
Préciser également la valeur de $S_{0,1}$.

3. <u>Etude des cas $n \geqslant p \geqslant 0$</u>

(a) En utilisant les formules du pion/capitaine et de Pascal, établir, si $p \geqslant 0$ et $n \geqslant 1$:

$$S_{n,p+1} = n\,(S_{n,p} - S_{n-1,p}).$$

(b) En déduire :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall n > p,\ S_{n,p} = 0.$$

(c) A l'aide de la question **3a)**, déterminer une relation entre $S_{p+1,p+1}$ et $S_{p,p}$.
En déduire une expression simple de $S_{p,p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.