Exercice

I - Etude du cas général

E désigne ici **un** $\mathbb{R}$-espace vectoriel non trivial, mais quelconque, et f **un** endomorphisme de E ($f \in \mathcal{L}(E)$) vérifiant l'égalité :

$$f^2 - 4f + 3I = 0$$

où l'on a posé $\mathrm{I} = \mathrm{Id}_E$, application identité de E (rappel : ici, 0 représente l'application nulle $0_{\mathcal{L}(E)}$).

1. Montrer que f est un automorphisme de E et exhiber f^{-1}.
2. On note g et h les éléments de $\mathcal{L}(E)$ définie par $g = f - 3\mathrm{I}$ et $h = f - \mathrm{I}$.
   (a) Déterminer $g \circ h$ et $h \circ g$. En déduire deux inclusions, que l'on prouvera, liant chacune deux ensembles parmi les quatre suivants : $\mathrm{Im}(g)$, $\mathrm{Im}(h)$, $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Ker}(h)$.
   (b) Montrer que I peut s'écrire comme combinaison linéaire de g et h.
   En déduire que $E = \mathrm{Im}(g) + \mathrm{Im}(h)$.
   (c) On pose $G = \mathrm{Ker}(g)$ et $H = \mathrm{Ker}(h)$.
   Prouver[1] que G et H sont des sous-espaces supplémentaires de E.
3. On note p le projecteur sur G parallèlement à H, et q le projecteur sur H parallèlement à G. Faire un schéma illustrant cette situation et faisant apparaître les espaces G, H, un vecteur $\vec{x}$ quelconque, $p(\vec{x})$ et $q(\vec{x})$.
   (a) Exprimer p et q à l'aide de g et h.
   (b) Montrer qu'on a $f = 3p + q$.
   (c) Déduire des résultats précédents l'expression de f^n en fonction uniquement de p et q (et de $n \geqslant 1$).
   (d) L'expression obtenue est-elle valable pour $n = -1$?

II - Un premier cas particulier

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$: si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on pose $\varphi(X) = AX$.

1. Justifier que $\varphi \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ vérifie $\varphi^2 - 4\varphi + 3\mathrm{I} = 0$.
2. Montrer qu'il existe deux projecteurs p et q de $E = \mathbb{R}^3$, que l'on explicitera, et des constantes réelles a et b vérifiant : $\forall n \geqslant 1$, $\varphi^n = a^n p + b^n q$.
3. Trouver, à l'aide de la question précédente, l'expression analytique de φ^n.
4. On définit trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$ et, pour tout $n \geqslant 0$,
   $\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & -u_n + 2v_n - 2w_n \\ v_{n+1} & = & -2u_n + 3v_n - 2w_n \\ w_{n+1} & = & 2u_n - 2v_n + 3w_n \end{array}\right.$ et on pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer u_n, v_n et w_n en fonction de u_0, v_0 et w_0 (et de n).
   (b) A quelle condition sur X_0 les trois suites convergent-elles simultanément ?

III - Un second cas particulier

On considère maintenant l'application ψ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par, pour tout $P = P(X) \in \mathbb{R}_2[X]$:

$$\psi(P(X)) = \left(X^2+1\right) P(1) + P(X) \quad \text{i.e} \quad \psi(P) = P(1)(X^2+1) + P.$$

1. Montrer que ψ est bien un **endo**morphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que $\psi^2 - 4\psi + 3I = 0$.
3. Justifier que ψ est un **auto**morphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et exprimer $\psi^{-1}(P(X))$ à l'aide de $P(1)$ et de $P(X)$.
4. Montrer qu'il existe deux projecteurs p et q de $E = \mathbb{R}_2[X]$, que l'on explicitera, et des constantes réelles a et b vérifiant : $\forall n \geqslant 1$, $\psi^n = a^n p + b^n q$.
5. Préciser $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Ker}(q)$ sous forme d'espaces vectoriels engendrés.
6. Donner l'expression de $\psi^n\left(1 + X + X^2\right)$.
7. Cette question est largement indépendante de ce qui précède.
   On note Δ, l'endomorphisme (dérivation) de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $\Delta(P) = P'$.
   Les endomorphismes ψ et Δ de $\mathbb{R}_2[X]$ commutent-ils ?
   On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ tels que $(\Delta\circ\psi)(P) = (\psi\circ\Delta)(P)$: justifier que $\mathcal{S}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}_2[X]$, et en déterminer une base.

1. On n'oubliera pas que $G = \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{I})$ et $H = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{I})$, donc $\vec{x} \in G$ équivaut à $f(\vec{x}) =$..., et $\vec{x} \in H$ à $f(\vec{x}) =$...