

PROBLEME**Quelques résultats généraux**

Soit E , un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$.

Soit u et v , deux endomorphismes de E . Démontrer les quatre résultats suivants :

$$(P1) \text{ Ker}(u) \subset \text{Ker}(v \circ u)$$

$$(P2) \text{ Ker}(u) = \text{Ker}(v \circ u) \Leftrightarrow \text{Im}(u) \cap \text{Ker}(v) = \{\vec{0}_E\}$$

$$(P3) \text{ Im}(v \circ u) \subset \text{Im}(v)$$

$$(P4) \text{ Im}(v \circ u) = \text{Im}(v) \Leftrightarrow \text{Im}(u) + \text{Ker}(v) = E$$

On pourra, dans la suite du problème, utiliser ces résultats à condition de les identifier précisément.

Etude des noyaux et images itérés d'un endomorphisme

Soit f , un endomorphisme du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

On note $f^0 = \text{Id}_E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$: $f^{k+1} = f \circ f^k$. Ainsi $f^k = f \circ f \circ \dots \circ f$ (k fois).

On définit alors, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, les ensembles : $N_k = \text{Ker}(f^k)$ et $I_k = \text{Im}(f^k)$.

1. Qui sont N_0 et I_0 ?
2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$N_k \subset N_{k+1} \quad \text{et} \quad I_{k+1} \subset I_k.$$

On peut donc affirmer que, **pour l'inclusion**, la suite $(N_k = \text{Ker}(f^k))_{k \geq 0}$ est croissante et que la suite $(I_k = \text{Im}(f^k))_{k \geq 0}$ est décroissante.

3. On suppose, dans cette question seulement, qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $N_n = N_{n+1}$.
 - (a) Montrer que, sous cette condition : $N_{n+1} = N_{n+2}$.
 - (b) Montrer ensuite, pour tout entier $k \geq 0$: $N_{n+k} = N_n$.
 - (c) Prouver l'égalité $N_n \cap I_n = \{\vec{0}\}$.
 - (d) Justifier l'existence de p , le plus petit entier de $\mathbb{N}$ vérifiant $N_p = N_{p+1}$.
4. On suppose, dans cette question seulement, qu'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $I_m = I_{m+1}$.
 - (a) Montrer que, sous cette condition : $I_{m+1} = I_{m+2}$.
 - (b) Montrer ensuite, pour tout entier $k \geq 0$: $I_{m+k} = I_m$.
 - (c) Prouver l'égalité $E = I_m + N_m$.
 - (d) Justifier l'existence de q , le plus petit entier de $\mathbb{N}$ vérifiant $I_q = I_{q+1}$.
5. **Définition** : on dit qu'un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est de **caractère fini** s'il existe un entier n et un entier m tels que $N_n = N_{n+1}$ et $I_m = I_{m+1}$.
 Soit f un endomorphisme de E de **caractère fini**. D'après les questions précédentes, on peut alors définir p et q , les plus petits entiers vérifiant respectivement ces relations.
 - (a) Montrer¹ que N_p et I_q sont des sous-espaces supplémentaires dans E .
 - (b) Prouver l'égalité $p = q$.

Quelques exemples

Pour chacun des exemples suivants, préciser si p et q existent et donner leurs valeurs le cas échéant.

1. E , $\mathbb{K}$ -espace vectoriel quelconque, et f un projecteur de E .
2. E , $\mathbb{K}$ -espace vectoriel quelconque, et f une symétrie vectorielle de E .
3. $E = \mathbb{R}^3$ et $f(x, y, z) = (x + y + z, -y, x - y + z)$.
 Complément : l'application f est-elle un projecteur de $\mathbb{R}^3$?
4. $E = \mathbb{R}^3$ et $f(x, y, z) = (0, x, z)$.
5. $E = \mathbb{R}^3$ et $f(x, y, z) = (y, -x + y + z, x - z)$.
6. $E = \mathbb{R}[X]$ et $f(P) = P'$.
7. $E = \mathbb{R}[X]$ et $f(P) = X.P$.
8. $E = \mathbb{R}[X]$ et $f(P) = P(1).X^2$.
9. $E = \mathbb{R}[X]$ et $f(P) = P(0).X^2$.
10. $E = \mathbb{R}[X]$ et $f(P) = P(2).X^2$.
11. $E = \mathbb{R}[X]$ et $f(P) = P(0).X^2 - P(1).X$.

1. Pour cette question et la suivante, on n'hésitera pas à utiliser les sev N_{p+q} et I_{p+q} .