

Rappel : si F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E (i.e si $F \oplus G = E$), alors, pour tout $\vec{x} \in E$, il **existe** un **unique** couple de vecteurs $(\vec{x}_F, \vec{x}_G) \in F \times G$ tel que $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. L'application $p : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ \vec{x} & \longmapsto p(\vec{x}) = \vec{x}_F \end{cases}$ s'appelle **projecteur (ou projection vectorielle) sur F parallèlement à G** (ou sur F selon G) (ou de base F et de direction G).

Exercice 1 Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, le \mathbb{R} -espace vectoriel des suites à valeurs réelles.

On note B l'ensemble des suites réelles bornées.

1. Montrer que B est un sous-espace vectoriel de E .
2. On note S l'ensemble des suites réelles u vérifiant la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+2} = 9u_{n+1} - 4u_n$. Justifier que S est un plan vectoriel.
3. Montrer que $D = S \cap B$ est une droite vectorielle.
4. Avec $H = \{u \in E \mid u_0 = 0\}$: montrer que H et D sont des sous-espaces supplémentaires de E .
5. Soit t , suite constante égale à 3. Préciser $p(t)$ où p est le projecteur sur H parallèlement à D .

Exercice 2 Soit $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions numériques de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

1. On note D l'ensemble des fonctions dérivables sur \mathbb{R} et solutions de l'équation différentielle « $y' - xy = 0$ ». Prouver que D est un sous-espace vectoriel de E .
2. B est l'ensemble des fonctions bornées de E . Montrer que B est un sous-espace vectoriel de E .
3. Montrer que les sous-espaces B et D sont en somme directe. Sont-ils supplémentaires dans E ?
4. Montrer que $H = \{f \in E \mid \int_0^1 tf(t)dt = 0\}$ et D sont des sous-espaces supplémentaires de E .
5. On note p , le projecteur sur H parallèlement à D : déterminer $g = p(\exp)$.

Exercice 3 Soit $E = \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions numériques dérivables deux fois sur \mathbb{R} .

On note : $F = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + 4f(x) = 0\}$ et $G = \left\{ f \in E \mid \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt = f(0) = 0 \right\}$.

1. Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E . Préciser une famille génératrice de F .
2. Montrer que $E = F \oplus G$.
3. Soit p , le projecteur sur F parallèlement à G : donner l'expression de $p(\cos)$.

Exercice 4 On considère les sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^3$ F et G suivants :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z\} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0 \text{ et } z - 2y = 0\}.$$

1. (a) Donner une famille génératrice de F .
(b) Donner une famille génératrice de G .
(c) Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$
2. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G .
Soit $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $p(\vec{u})$ en fonction de x, y et z .

Exercice 5 Soit $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions définies sur \mathbb{R} , indéfiniment dérivables et à valeurs réelles.

1. On pose $F = \{f \in E \mid f \text{ est solution de l'équation différentielle } 4y'' - 4y' + 5y = 0\}$. Déterminer un système générateur de F .
2. Si a et b sont des réels, on définit l'ensemble $F_{a,b} = \{f \in E \mid f(a) = f(b) = 0\}$.
Montrer que $F_{a,b}$ est un sous-espace vectoriel de E .
3. Dans cette question seulement : on prend $a = 0$ et $b = \pi$.
 $F_{a,b}$ et P sont-ils des sous-espaces supplémentaires de E ?
4. Dans cette question seulement : on prend $a = 0$ et $b = \frac{\pi}{2}$.
Montrer que $F_{a,b}$ et P sont des sous-espaces supplémentaires de E .

Exercice 6 Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(2) = 0\}$.

- Déterminer des familles génératrices de F et de G .
- Montrer que F et G sont des sous-espaces supplémentaires de $E = \mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 7 On rappelle : $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid E_{2,2}M = 0\}$ et $G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid E_{1,1}M = 0\}$.

- Montrer que F et G sont des sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Identifier $E_{1,1} + E_{2,2}$. En déduire que F et G sont en somme directe.
- Parmi les quatre matrices $E_{1,1}$, $E_{1,2}$, $E_{2,1}$ et $E_{2,2}$, lesquelles sont dans F ? dans G ?
- En déduire que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 8 Soit $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices 3×3 , on note \mathcal{S} l'ensemble des matrices symétriques et \mathcal{A} l'ensemble des matrices antisymétriques de E et F l'ensemble des matrices de \mathcal{S} dont la somme des termes de chaque ligne et chaque colonne est nulle. On note :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Montrer que \mathcal{S} et \mathcal{A} sont des sous-espaces supplémentaires de E .
- Soit M , une matrice dans \mathcal{S} : justifier que si la somme sur chaque ligne de M vaut 0 alors la somme sur chaque colonne également. En déduire, si $M \in \mathcal{S}$: $(M \in F) \iff (BM = 0)$.
 - Montrer que F est un sous-espace de E .
 - Montrer que si $(M, N) \in F^2$ et $MN = NM$ alors $MN \in F$.
- Montrer que la famille (E_1, E_2, E_3) est libre.
 - Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$: montrer que $M \in F$ se traduit par un système sur les coefficients (a, b, c, d, e, f) .
 - Résoudre ce système et exprimant les solutions à l'aide de a, c et f , en déduire que la famille $B_1 = (E_1, E_2, E_3)$ est une base de F .
- On rappelle que $GL_3(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices inversibles de E .
 - L'ensemble $GL_3(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?
 - Montrer que $GL_3(\mathbb{R}) \cap F = \emptyset$.
- Soit $M = ((a_{i,j})) \in E$, on définit $\text{Tr}(M) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ (la **trace** de la matrice M).
 - Montrer que $P = \{M \in F, \text{Tr}(M) = 0\}$ est un plan vectoriel de E .
Montrer que la famille $B_2 = (E_1 - E_3, E_2 - E_3)$ est une base de P .
 - Soit $D = \text{Vect}(2E_1 - E_2 + 2E_3)$, montrer que $D \oplus P = F$.
 - Soit $M \in P$ de coordonnées (x, y) dans la base B_2 . Calculer M^2 et M^3 , puis montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $M^{2n} \in D$ et $M^{2n+1} \in P$.