PROBLEME

Soit E un ensemble fini non vide, pour $p \in \mathbb{N}^*$, on appelle partitions de E en p classes tout ensemble $\mathcal{A} = \{A_1, \cdots, A_p\}$ de p parties de E telles que

- $\forall i \in [[1, p]],\ A_i \neq \varnothing$
- $\forall (i, j) \in [[1, p]]^2,\ i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$
- $E = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} A_i$

Par exemple si $E = [[0, 5]]$, une partition en 3 classes de E est $\{\{0, 2, 3\}, \{1, 4\}, \{5\}\}$, une autre est $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{0, 5\}\}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\left\{ {n \atop p} \right\}$ le nombre de partitions en p classes de E de cardinal n (donc typiquement de $E = [[1, n]]$). On adopte les conventions

$$\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1 \quad \text{et} \quad \forall p \geqslant 1,\ \left\{ {0 \atop p} \right\} = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1,\ \left\{ {n \atop 0} \right\} = 0.$$

Par exemple si $E = [[1, 3]] = \{1, 2, 3\}$, il y a $\left\{ {3 \atop 2} \right\}$ partitions en 2 classes de E. On peut les déterminer, les voici :

$$\{\{1, 2\}, \{3\}\}\ ;\ \{\{2\}, \{1, 3\}\}\ \text{ et }\ \{\{1\}, \{2, 3\}\}.$$

Partie I - Premières propriétés

1. Justifier, en donnant les partitions en 2 classes possibles de $[[1, 4]]$, que $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$.
2. Justifier que, si $p > n \geqslant 1$, alors $\left\{ {n \atop p} \right\} = 0$.
3. Pour $n \geqslant 1$, déterminer $\left\{ {n \atop 1} \right\}$ et $\left\{ {n \atop n} \right\}$.
4. Montrer que, pour $n \geqslant 2$, on a $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$. Cette formule est-elle encore valable si $n = 1$? $n = 0$?

   On pourra commencer par dénombrer le nombre de couples (A, B) de $\mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = E$ et $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$.
5. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tels que $\boxed{1 \leqslant p \leqslant n}$ et E de cardinal n. On fixe un élément $x \in E$. Pour construire une partition en p classes de E, on peut :
   ① prendre une partition de $F = E \setminus \{x\}$ en $p - 1$ classes et ajouter la partie $\{x\}$.
   ① prendre une partition de $F = E \setminus \{x\}$ en p classes et ajouter à une de ses parties l'élément x.

   (a) Déterminer le nombre de partitions du type ①.

   (b) Déterminer le nombre de partitions du type ②.

   (c) En déduire la formule du triangle de `Stirling` :
   $$\left\{ {n \atop p} \right\} = p\left\{ {n-1 \atop p} \right\} + \left\{ {n-1 \atop p-1} \right\}.$$

   (d) Cette formule est-elle encore valable si $1 \leqslant n < p$?

Partie II - Quelques valeurs intéressantes

1. On pose, pour $n \geqslant 1$, $a_n = \left\{ {n \atop n-1} \right\}$. Donner une relation de récurrence pour la suite $(a_n)_n$ et en déduire $a_n = \dbinom{n}{2}$.
2. On pose pour $n \geqslant 0$, $b_n = \dfrac{1}{3^n}\left\{ {n \atop 3} \right\}$.

   (a) Donner les valeurs de b_n pour $n \in \{0, 1, 2, 3\}$.

   (b) Simplifier $b_{n+1} - b_n$ (on utilisera la formule du triangle de `Stirling`).

   (c) En déduire b_n en fonction de n puis la valeur de $\left\{ {n \atop 3} \right\}$ si $n \geqslant 3$.
3. Construire le triangle de `Stirling` analogue du triangle de `Pascal` pour $0 \leqslant p \leqslant n \leqslant 6$ (un code Python peut être utile ....).

Partie III - Expression de x^n selon les puissances factorielles descendantes

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose (puissance factorielle descendante) :

$$x^{\lfloor n \rfloor} = x\,(x-1)\cdots(x-n+1) = \prod_{k=0}^{n-1}(x-k).$$

Par convention, on pose $x^{\lfloor 0 \rfloor} = 1$.

1. Pour le plaisir : qui est $n^{\lfloor n \rfloor}$? $n^{\lfloor n+1 \rfloor}$? $n^{\lfloor p \rfloor}$ si $1 \leqslant p \leqslant n$?
2. Exprimer $x^{\lfloor 1 \rfloor}$, $x^{\lfloor 2 \rfloor}$ et $x^{\lfloor 3 \rfloor}$ à l'aide de x et de ses puissances.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $x^{\lfloor n+1 \rfloor} + nx^{\lfloor n \rfloor}$. Et si $n = 0$?
4. Montrer, par récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}\ , \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\lfloor k \rfloor}.$$

Partie IV - Applications

1. Soit $n = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 = 30\,030$. De combien de manières peut-on écrire n comme produit de 3 entiers tous supérieurs strictement à 1 ?
2. Un phacochère blessé tombe dans une mare peuplée de 24 crocodiles affamés. Les sauriens, ces vauriens, se jettent sur lui et le découpent en 126 morceaux, puis en mangent chacun au moins un.
   (a) Combien y-a-t-il de festins possibles (sans distinguer les crocodiles) ?
   (b) On suppose tous ces festins équiprobables, quelle est la probabilité qu'un des crocodiles mange, à lui seul, 103 morceaux du phacochère (hakuna matata !) ?

Partie V - Nombres de `Bell`

1. En utilisant la relation de `Pascal` et du triangle de `Stirling`, montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:
$$\forall\,(n,p) \in \mathbb{N}^2,\ \left\{ {n+1 \atop p+1} \right\} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\{ {k \atop p} \right\} = \sum_{k=p}^{n} \binom{n}{k} \left\{ {k \atop p} \right\}.$$
2. On définit le $n^{\text{ième}}$ nombre de `Bell`, noté B_n comme le nombre de partitions (strictes) d'un ensemble E de cardinal n (en un nombre de classes quelconques). On pose, par convention $B_0 = 1$.
   (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}$.
   (b) Prouver : $\forall n \in \mathbb{N},\ B_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i$.
   On pourra commencer par justifier que $B_{n+1} = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \left\{ {n+1 \atop j+1} \right\}$ puis utiliser une somme double.
   (c) Calculer B_n pour $n \in [[1, 10]]$ (un code Python s'impose ....).

Partie VI - Complément - Lien avec les surjections

Soit E, un ensemble de cardinal $n \geqslant 1$ et F un ensemble de cardinal $k \geqslant 1$.

1. Questions de cours
   (a) Quel est le nombre d'applications $g : E \to F$?
   (b) Quel est le nombre d'applications injectives $g : E \to F$?
2. On note $S(n,k)$ le nombre d'applications surjectives $g : E \to F$.
   (a) Justifier la relation suivante : $S(n,k) = k! \times \left\{ {n \atop k} \right\}$.
   Sous quelles conventions cette formule reste-t-elle vraie pour tout $n \geqslant 0$ et tout $k \geqslant 0$?
   (b) A l'aide d'un résultat établi dans une partie précédente, donner une formule simple reliant $S(n,k)$, $S(n-1,k)$ et $S(n-1,k-1)$ pour $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$.